

# **GALĪGO ELEMENTU METODE**

**Rolands Rikards un Andris Čate**

Rīgas Tehniskā Universitāte

Būvkonstrukciju automatizētā projektēšana

Rīga, 2001



# Priekšvārds

Galīgo elementu metodi (GEM) tagad lieto pilnīgi visos inženieraprēķinos - gan būvniecībā, gan mašīnbūvē, gan kuģu un lidmašīnu projektēšanā. Ar GEM veic ne tikai aprēķinus cietvielu mehānikā, bet arī šķidrums un gāzu mehānikā, elektrotehnikā, elektronikā un praktiski visās citās tehnikas nozarēs. GEM pieeja ir universāla. Tāpat universāla ir pati metode. Ja izprot GEM algoritmu visvienkāršākā gadījumā, tad viegli ir izprast arī visus sarežģītus gadījumus. Šajā lekciju kursā ir aplūkoti GEM algoritma pamati. Ar to pietiek, lai varētu sākt lietot GEM programmas praktiskos aprēķinos.

Lai varētu sekot šim lekciju kursam nepieciešamas priekšzināšanas teorētiskajā mehānikā, materiālu pretestībā vai būvmehānikā un nedaudz arī elastības teorijā. Tāpat nepieciešamas priekšzināšanas augstākajā matemātikā šādās sadaļās - diferenciāl- un integrālrēķinos un matricu algebrā.

Šajā lekciju kursā ir aplūkots galīgo elementu metodes sakarību izvedums tikai lineārām sistēmām, kurās pārvietojumi ir mazi un materiāls seko Huka likumam. Tomēr pēdējā nodaļā, kurā aplūkotas komerciālo GEM programmu pielietošanas iespējas, parādīti arī risinājumi tādām konstrukcijām, kur nepieciešams izmantot GEM nelineāros algoritmus. Tomēr metodes pamatprincipi gan lineārā, gan nelineārā gadījumā ir tie paši un metodes būtību var izprast, aplūkojot tikai lineāro gadījumu.

Lkciju kurss ir domāts Būvniecības fakultātes studentiem. To var izmantot arī Mašīnzinību un citu fakultāšu studenti. Tāpat to var izmantot inženieri, kas nodarbojas ar konstrukciju praktisko projektēšanu, izmantojot GEM komerciālās programmas. Ir jāatzīmē, ka galīgo elementu metodes komerciālo programmu izmantotājiem arī ir nepieciešamas vismaz minimālas zināšanas par metodes teorētiskiem pamatiem. Tas ļaus labāk izprast ar GEM programmu iegūtos rezultātus, piemēram, saprast tādu vienkāršu lietu, kā galīgo elementu tīkla veidošanu. Teiksim, spriegumu noteikšanai nepieciešams smalkāks konstrukcijas dalījums galīgajos elementos, nekā pārvietojumu noteikšanai.

Plašāku informāciju par GEM var iegūt citās mācību grāmatās,

zinātniskās monogrāfijās un rakstos. Ar GEM bibliogrāfiju var iepazīties datu bāzē, kuras Web adrese ir: <http://ohio.ikp.liu.se/fe/index.html> un arī citur.

No grāmatām par galīgo elementu metodi var ieteikt samērā vienkāršo ievada kursu [11], kā arī mācību grāmatu [16]. Variāciju metodes elastības teorijā ir aplūkotas [15] (ir tulkojums krievu valodā). Kā papildus literatūru tiem, kas jau apguvuši ievada kursu, var rekomendēt [13, 14]. Nelineārās dinamikas uzdevumi ir aplūkoti [12].

Autori izsaka pateicību maģistrantūras studentiem Jevgeņijam Rožkovam un Andrejam Raskovam par palīdzību zīmējumu un grafiku sagatavošanā, kā arī Sandrim Ručevskim un Oļģertam Ozoliņam par piemēru aprēķinu ar programmu ANSYS un Kasparam Kalniņam par piemēru aprēķinu ar programmu LIRA. Lekciju kurss uzrakstīts ar LATEX2 $\epsilon$  programmu.

Rolands Rikards  
Andris Čate  
Rīga, 2001. gada aprīlis

# Saturs

<b>1</b>	<b>Teorētiskais pamats</b>	<b>9</b>
1.1	Ievads . . . . .	9
1.2	Metodes vēsture . . . . .	9
1.3	Potenciālās enerģijas minimuma princips . . . . .	10
1.3.1	Piemērs: elastīgas atsperes . . . . .	12
1.4	Ritca metode . . . . .	14
1.4.1	Piemērs: stiepts stienis . . . . .	15
1.5	Secinājumi . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Viendimensiju problēmas</b>	<b>19</b>
2.1	Stieņa potenciālā enerģija . . . . .	19
2.2	Variāciju vienādojums . . . . .	21
2.3	Līdzsvara vienādojums . . . . .	22
2.4	Konstrukcijas dalīšana galīgos elementos . . . . .	23
2.5	Galīgais elements . . . . .	24
2.5.1	Elementa stinguma matrica . . . . .	29
2.5.2	Elementa ārējie spēki . . . . .	30
2.6	Galīgo elementu montāža konstrukcijā . . . . .	31
2.7	GEM uzdevuma risināšanas algoritms . . . . .	34
2.7.1	GEM programma . . . . .	36
2.7.2	Uzdevuma aprēķins ar datorprogrammu FEM1D . . . . .	40
2.8	Potenciālās enerģijas novērtējums . . . . .	40
<b>3</b>	<b>Sijas</b>	<b>45</b>
3.1	Sijas potenciālā enerģija . . . . .	45
3.2	Sijas galīgais elements . . . . .	47
3.3	Ārējo spēku darbs un sijas pilnā potenciālā enerģija . . . . .	51
3.4	Spriegumu aprēķins sijā . . . . .	53
3.5	Sijas aprēķina piemēri . . . . .	53

<b>4</b>	<b>Divdimensiju problēmas</b>	<b>57</b>
4.1	Ievads . . . . .	57
4.2	Modelēšana ar galīgiem elementiem . . . . .	58
4.3	Trīsstūra galīgais elements . . . . .	60
4.3.1	Mainīgo izoparametriskā reprezentācija . . . . .	62
4.3.2	Potenciālā enerģija . . . . .	65
4.3.3	Elementa un globālā stinguma matrica . . . . .	65
4.3.4	Elementa mezglu spēki . . . . .	66
4.3.5	Visas konstrukcijas potenciālā enerģija . . . . .	69
4.3.6	Spriegumu aprēķins . . . . .	69
4.4	Aprēķina piemērs . . . . .	69
<b>5</b>	<b>Spiesta stieņa noturība</b>	<b>73</b>
5.1	Atrisinājums ar Ritca metodi . . . . .	74
5.2	Aprēķins ar galīgo elementu metodi . . . . .	75
5.3	Aprēķina piemēri . . . . .	76
<b>6</b>	<b>Dinamikas uzdevumi</b>	<b>79</b>
6.1	Ievads . . . . .	79
6.2	Dinamikas uzdevumu formulējums . . . . .	79
6.2.1	Kustības vienādojuma piemērs . . . . .	80
6.3	Konstrukcija ar izkliedētu masu . . . . .	81
6.4	Galīgo elementu masas matricas . . . . .	83
6.4.1	Viendimensiju stienis . . . . .	83
6.4.2	Liekta sija . . . . .	84
6.4.3	Trīsstūra elements . . . . .	84
6.5	Pašsvārstību aprēķina piemēri . . . . .	86
6.5.1	Konsolsijas svārstību aprēķins . . . . .	86
6.5.2	Daudzslaidumu sijas svārstību aprēķins . . . . .	87
<b>7</b>	<b>Kopnes un rāmji</b>	<b>89</b>
7.1	Kopnes . . . . .	89
7.1.1	Lokālā un globālā koordinātu sistēma . . . . .	89
7.1.2	Elementa stinguma matrica . . . . .	92
7.1.3	Spriegumu aprēķins . . . . .	93
7.2	Plakanu rāmju aprēķins . . . . .	93
7.3	Rāmja aprēķina piemērs . . . . .	96
<b>8</b>	<b>Galīgo elementu programmas</b>	<b>99</b>
8.1	Komerciālās programmas . . . . .	99
8.2	Konstrukciju aprēķina piemēri . . . . .	101

8.2.1	Rāmja aprēķins . . . . .	101
8.2.2	Plātņu savienojuma aprēķins . . . . .	101
8.2.3	Ribotas kompozīta čaulas noturība . . . . .	106

<b>Literatūra</b>		<b>107</b>
-------------------	--	------------





# Nodaļa 1

## Teorētiskais pamats

### 1.1 Ievads

Sakarā ar straujo datortehnikas attīstību galīgo elementu metode pēdējos gados ir kļuvusi par galveno rīku dažādu inženieraprēķinu veikšanā. Lietojumus var atrast gan automobiļu, gan lidmašīnu, gan civilo ēku un tiltu būvniecībā. Lietojot CAD sistēmas, samērā vienkārši var atrisināt ļoti sarežģītas problēmas. Bet pats galvenais ir tas, ka ātri var aprēķināt dažādus variantus.

Visu šo daudzo problēmu risināšanai ir pieejamas komerciālas programmas. Lai labāk saprastu to iespējas, vajag zināt gan teoriju, gan modelēšanas tehniku, gan metodes skaitlisko realizāciju. Galīgo elementu metodē konstrukcija tiek sadalīta diskrētos jeb galīgos elementos, kuriem ir vienkārša ģeometriskā forma. Nezināmie lielumi (pārvietojumi) tiek noteikti elementu mezglos. Savācot kopā konstrukcijas visus galīgos elementus, tiek iegūta vienādojumu sistēma. To atrisinot, iegūst konstrukcijas aprēķina rezultātus - pārvietojumus un spriegumus.

Diemžēl latviešu valodā ir tikai divi mācību līdzekļi par galīgo elementu metodi. Nedaudz tā ir izklāstīta Lavendeļa materiālu pretestības mācību grāmatā [1], bet čaulas un plātnes ir aplūkotas Rikarda mācību līdzeklī [2].

### 1.2 Metodes vēsture

Galīgo elementu metodes pamatidejas nāk no variāciju metodēm, galvenokārt no Ritca (Ritz) un Galerkina metodēm, kā arī no būvmehānikas aprēķina metodēm. Šo metožu vispārinājumi kļuva par pamatu galīgo elementu metodei. Te varētu minēt tādus zinātniekus kā Hrenikoff [3], Courant [4], Argyris [5]. Tomēr vislielāko ieguldījumu metodes tālākā attīstībā ir devis

Turner, Clough un līdzautoru darbs [6]. 1960. gadā Clough [7] pirmais ieviesa terminu galīgais elements. Tomēr 1960os gados paralēli vēl lietoja arī terminu diskrētais elements. Pirmā mācību grāmata par galīgo elementu metodi tika publicēta 1967. gadā [8]. Latvijā ar galīgo elementu metodi (GEM) sāka nodarboties septiņdesmito gadu sākumā (Lavendelis, Rikards). Pirmo lielo GEM datorprogramu Latvijā izveidoja 1975. gadā (Čate). RTU studentu apmācībā GEM tika iekļauta materiālu pretestības kursā sākot ar 1980. gadu.

### 1.3 Potenciālās enerģijas minimuma princips

Konstrukcijas potenciālo enerģiju var definēt kā deformācijas potenciālās enerģijas  $U$  un ārējo spēku darba  $W$  summu

$$\Pi = U - W \quad (1.1)$$

Šeit  $W$  ir ar mīnusa zīmi, jo ārējie spēki, pastrādājot darbu uz pārvietojumiem, zaudē potenciālu.

Aplūkosim potenciālās enerģijas izvedumu trīsdimensiju (3D) ķermenim (konstrukcijai) (sk. Zīm. 1.1). Šim 3D ķermenim ar tilpumu  $V$  ir robežvirsmas  $S$ . Punkta koordinātes ir  $\mathbf{x} = [x, y, z]^T$ . Punkta pārvietojumu raksturo vektors  $\mathbf{u}$

$$\mathbf{u} = [u, v, w]^T \quad (1.2)$$

Uz robežvirsmas daļas  $S_u$  ir uzdoti pārvietojumi, bet uz virsmas  $S_T$  ārējie izkliedētie spēki  $\mathbf{T}$ , kurus mēra uz laukuma vienību

$$\mathbf{T} = [T_x, T_y, T_z]^T \quad (1.3)$$

Bez tam uz ķermeni darbojas tilpuma spēki  $\mathbf{f}$ , kurus mēra uz tilpuma vienību

$$\mathbf{f} = [f_x, f_y, f_z]^T \quad (1.4)$$

Tāpat uz ķermeni var darboties koncentrēts spēks  $\mathbf{P}_i$  ar komponentēm

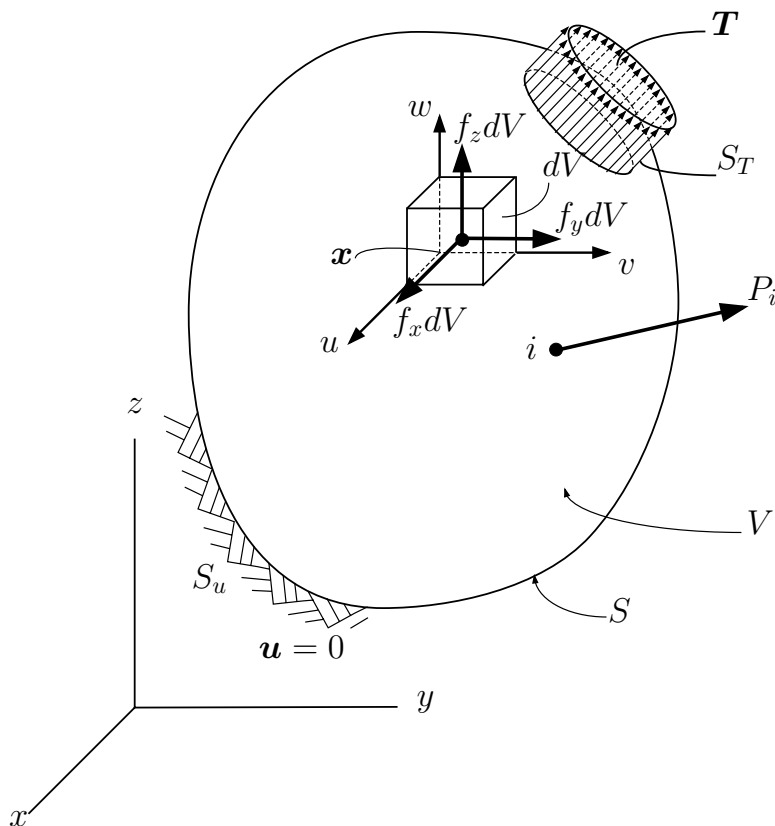
$$\mathbf{P}_i = [P_x, P_y, P_z]^T \quad (1.5)$$

Ārējo spēku iespaidā konstrukcija deformējas un tajā rodas spriegumi

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}, \sigma_{xy}]^T \quad (1.6)$$

un deformācijas

$$\boldsymbol{\epsilon} = [\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}]^T \quad (1.7)$$



Zīmējums 1.1: Trīsdimensiju ķermenis

Spriegumus un deformācijas saista Huka likums

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon} \quad (1.8)$$

kurā izotropa materiāla elastības konstantes veido simetrisku ( $6 \times 6$ ) matricu

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

Šeit ieviests apzīmējums  $g = 0.5 - \nu$ .

Konstrukcijai, kas attēlota Zīm. 1.1, deformācijas potenciālo enerģiju (iekšējo enerģiju) var uzrakstīt šādā veidā

$$U = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\epsilon} dV \quad (1.10)$$

Tai pašai konstrukcijai ārējo spēku darba (ārējās enerģijas) izteiksme ir

$$W = \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{f} dV + \int_S \mathbf{u}^T \mathbf{T} dS + \sum_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{P}_i \quad (1.11)$$

Pilnās potenciālās enerģijas izteiksme ir iekšējās un ārējās enerģijas summa

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \sigma^T \epsilon dV - \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{f} dV - \int_S \mathbf{u}^T \mathbf{T} dS - \sum_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{P}_i \quad (1.12)$$

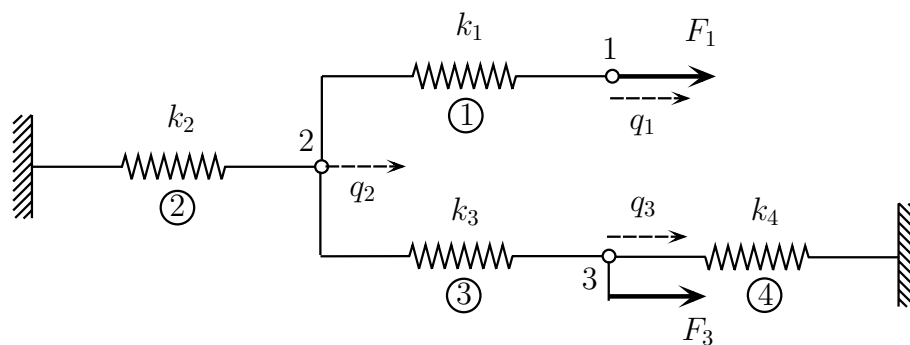
Mēs šeit aplūkojam konservatīvas sistēmas, t.i. tādas sistēmas, kurās ārējo spēku darbs nav atkarīgs no ceĶa. Tādām sistēmām var formulēt potenciālās enerģijas minimuma principu sekojošā veidā.

Konservatīvām sistēmām starp kinemātiski pieļaujamiem pārvietojumiem līdzsvara stāvoklim atbilst tie, kas dod minimumu sistēmas pilnai potenciālai enerģijai.

Kinemātiski pieļaujami pārvietojumi ir tie, kas atbilst nepārtrauktības nosacījumiem un robežnoteikumiem. Tā kā šajā grāmatā tiek aplūkota tikai pārvietojumu metode, kurā nezināmie ir pārvietojumi, tad nepārtrauktības nosacījumi tiek izpildīti automātiski.

### 1.3.1 Piemērs: elastīgas atsperes

Lai ilustrētu potenciālās enerģijas minimuma principu apskatīsim diskrētu sistēmu, kas satāv no elastīgām atsperēm (sk. Zīm. 1.2).



Zīmējums 1.2: Diskrēta sistēma no elastīgām atsperēm

Sistēmas potenciālā enerģija ir

$$\Pi = \frac{1}{2}(k_1\delta_1^2 + k_2\delta_2^2 + k_3\delta_3^2 + k_4\delta_4^2) - F_1q_1 - F_3q_3 \quad (1.13)$$

kur  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  un  $\delta_4$  ir pārvietojumi atsperēs. Tā kā  $\delta_1 = q_1 - q_2, \delta_2 = q_2, \delta_3 = q_3 - q_2, \delta_4 = -q_3$ , tad potenciālo enerģiju var izteikt caur mezglu pārvietojumiem  $q_i$

$$\Pi = \frac{1}{2}[k_1(q_1 - q_2)^2 + k_2q_2^2 + k_3(q_3 - q_2)^2 + k_4q_3^2] - F_1q_1 - F_3q_3 \quad (1.14)$$

Tātad šai sistēmai ir 3 brīvības pakāpes  $q_1, q_2$  un  $q_3$ . Lai iegūtu sistēmas līdzsvaru, ir jāatrod  $\Pi$  minimums. To nosaka atvasinot  $\Pi$  pēc  $q_i$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.15)$$

jeb izvērstā veidā

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = k_1(q_1 - q_2) - F_1 = 0, \quad (1.16)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = -k_1(q_1 - q_2) + k_2q_2 - k_3(q_3 - q_2) = 0,$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_3} = k_3(q_3 - q_2) + k_4q_3 - F_3 = 0$$

Šos vienādojumus var uzrakstīt matricu formā

$$\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F} \quad (1.17)$$

kur  $\mathbf{K}$  ir sistēmas stinguma matrica

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

bet  $\mathbf{q}^T = [q_1, q_2, q_3]$  ir pārvietojumi un  $\mathbf{F}^T = [F_1, 0, F_3]$  ir spēki.

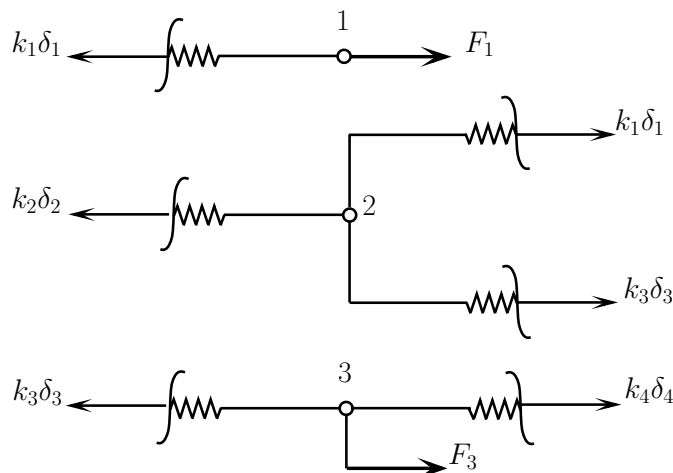
Alternatīva ir šķēlumu metode (sk. Zīm. 1.3), kuru izmantojot var uzrakstīt 3 līdzsvara vienādojumus

$$k_1\delta_1 = F_1, \quad (1.19)$$

$$k_2\delta_2 - k_1\delta_1 - k_3\delta_3 = 0,$$

$$k_3\delta_3 - k_4\delta_4 = F_3$$

Var redzēt, ka šie vienādojumi sakrīt ar vienādojumiem (1.17), kas iegūti, izmantojot potenciālās enerģijas minimuma principu.



Zīmējums 1.3: Šķēluma metode

## 1.4 Ritca metode

Konstrūcijai, kas attēlota Zīm. 1.1, potenciālo enerģiju izsaka funkcionālis (1.12). Trīsdimensiju (3D) konstrūcijai ir praktiski neiespējami atrast precīzo analītisko atrisinājumu. Šajā gadījumā var lietot tuvinātās metodes. Viena no tādām ir Ritca metode, kura pirmoreiz tika aprakstīta 1909. gadā [10]. Kaut gan jau 1873. gadā slavenais angļu zinātnieks Relejs [9] svārstību uzdevuma risināšanai izmantoja pēc būtības līdzīgu metodi. Tāpēc šo metodi sauc arī par Releja-Ritca metodi. Meklējot funkcionāļa (1.12) tuvināto minimumu ar Ritca metodi, tiek izmantotas pārvietojumu aproksimācijas

$$u = \sum a_i \phi_i(x, y, z), \quad i = 1, \dots, l \quad (1.20)$$

$$v = \sum a_j \phi_j(x, y, z), \quad j = l + 1, \dots, m$$

$$w = \sum a_k \phi_k(x, y, z), \quad k = m + 1, \dots, n$$

kur  $n > m > l$ . Funkcijas  $\phi_i$  parasti ir polinomi, kaut gan var izmantot arī citas, piemēram, trigonometriskās funkcijas. Izvēloties aproksimāciju, pārvietojumiem ir jāapmierina kinemātiskie robežnoteikumi. Ievietojot aproksimāciju (1.20) funkcionālī (1.12), pēc integrēšanas iegūstam

$$\Pi = \Pi(a_1, a_2, \dots, a_r) \quad (1.21)$$

kur  $r$  ir nezināmo skaits. Potenciālās enerģijas minimumu nosaka no  $r$  vienādojumu sistēmas atrisinājuma

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (1.22)$$

Ja ir zināmi koeficienti  $a_i$ , tad ir zināmi pārvietojumi (1.20), no kuriem var izrēķināt deformācijas un no tām, izmantojot Huka likumu, spriegumus.

### 1.4.1 Piemērs: stiepts stienis

Zīm. 1.4 attēloto stieni atrisināsim ar Ritca metodi. Stieņa potenciālā enerģija ir

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L EA \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx - Pu_1 \quad (1.23)$$

kur  $u_1 = u(x = 1)$ . Uzdevuma robežnoteikumi ir

$$u \Big|_{x=0} = 0, \quad u \Big|_{x=L} = 0 \quad (1.24)$$

Izvēlamies pārvietojumu aproksimāciju kvadrātiska polinoma veidā

$$u = a_1 + a_2x + a_3x^2 \quad (1.25)$$

Šim polinomam ir jāapmierina robežnoteikumi (1.24), tādēļ, ņemot vērā, ka  $L = 2$

$$\begin{aligned} 0 &= a_1 \\ 0 &= a_1 + 2a_2 + 4a_3 \end{aligned}$$

No šejienes iegūstam

$$a_2 = -2a_3$$

un aproksimācija, kas apmierina robežnoteikumus, ir

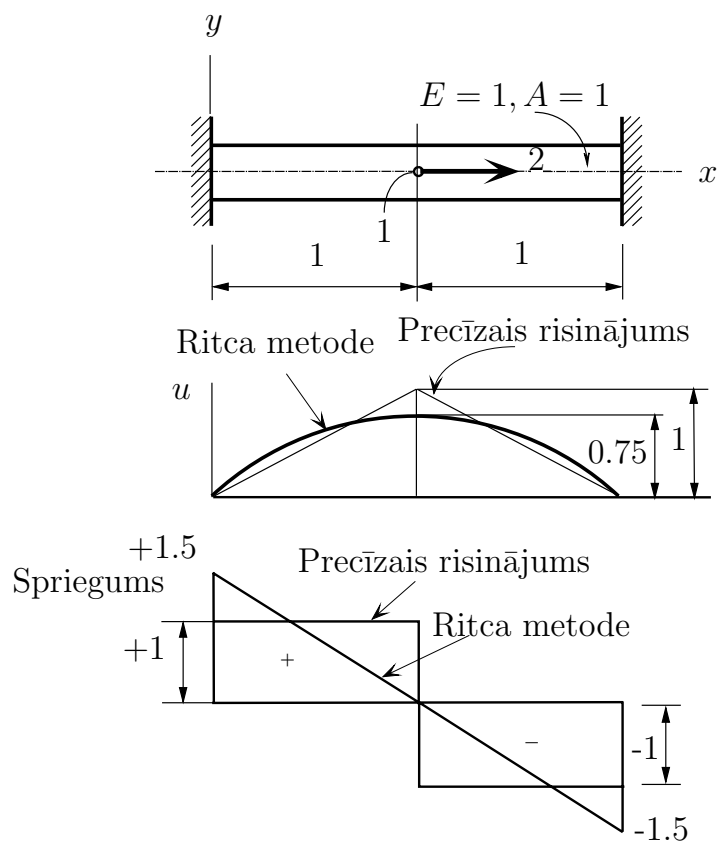
$$u = a_3(-2x + x^2)$$

Tāpat

$$u_1 = -a_3$$

Tādejādi

$$\frac{du}{dx} = 2a_3(-1 + x)$$



Zīmējums 1.4: Stiepta stieniņa aprēķins

un potenciālās enerģijas izteiksmi var integrēt

$$\begin{aligned}
 \Pi &= \frac{1}{2} \int_0^2 4a_3^2 (-1+x)^2 dx - 2(-a_3) \\
 &= 2a_3^2 \int_0^2 (1-2x+x^2) dx + 2a_3 \\
 &= 2a_3^2 \left( \frac{2}{3} \right) + 2a_3
 \end{aligned} \tag{1.26}$$

Potenciālās enerģijas minimuma nosacījums

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_3} = 4a_3 \left( \frac{2}{3} \right) + 2 = 0$$

No šejienes iegūstam atrisinājumu

$$a_3 = -0.75, \quad u_1 = -a_3 = 0.75$$



Spriegumus nosaka, izmantojot Huka likumu

$$\sigma = E\epsilon = E\frac{du}{dx} = 1.5(1 - x)$$

Zīm. 1.4 attēlotas pārvietojuma  $u$  un aksiālā sprieguma  $\sigma$  epīras. Parādīti divi atrisinājumi - precīzais analītiskais un tuvinātais, kas iegūts ar Rīta metodi. Šajā piemērā ir skaidri redzams, ka ar vienas vienkāršas funkcijas izvēli mēs nevaram iegūt pietiekošu precizitāti. Precizitāti varētu palielināt lietojot sarežģītāku aproksimējošo funkciju vai sadalot konstrukciju apakšapgabalos.

## 1.5 Secinājumi

Risinot konstrukcijas deformēšanās uzdevumus ir iespējamās šādas pieejas.

1. Klasiskā pieeja, kas balstās uz līdzsvara principa izmantošanu.
2. Pieeja, kas balstās uz potenciālās enerģijas minimuma principa izmantošanu.

Izmantojot pirmo pieeju, uzdevuma atrisinājumu parasti iegūst analītiskā formā. Izmantojot otro pieeju, uzdevuma atrisinājumu var arī iegūt analītiskā formā, bet parasti to iegūst skaitliskā formā, izmantojot datoru.

Abās pieejās problēmas atrisināšanai izmanto trīs vienādojumu grupas. Pirmajā pieejā tie ir

1. Līdzsvara vienādojumi.
2. Kinemātiskie vienādojumi.
3. Fizikālie vienādojumi (Huka likums).

Otrajā pieejā tie ir

1. Potenciālā enerģija.
2. Kinemātiskie vienādojumi.
3. Fizikālie vienādojumi (Huka likums).

Abās pieejās problēmas atrisināšanai vēl jāpievieno robežnoteikumi. Pirmajā pieejā tie ir

1. Statikas robežnoteikumi.
2. Kinemātikas robežnoteikumi.

Otrajā pieejā tie ir tikai kinemātikas robežnoteikumi.

Tātad līdzsvara princips un potenciālās enerģijas minimuma princips ir ekvivalenti. Tomēr otrais ir ļoti piemērots datoraprēķiniem, bet pirmo principu (līdzsvara) var lietot galvenokārt analītisku risinājumu iegūšanai.

Potenciālās enerģijas minimuma un citi variāciju principi ir aplūkoti darbos [15, 16]. Tātad potenciālās enerģijas minimuma principā variējamie lielumi ir pārvietojumi. Galīgo elementu metodi var bāzēt arī uz citiem variāciju principiem. Piemēram, var izmantot Kastiljano principu, kurā variējamie lielumi ir spriegumi. Var izmantot arī jauktos variāciju principus, kuros variējamie lielumi ir gan pārvietojumi, gan spriegumi, gan deformācijas.

Tomēr visplašāk galīgo elementu metodes sakarību izvedumos lieto potenciālās enerģijas minimuma principu, kuru sauc arī par Dirihlē principu.

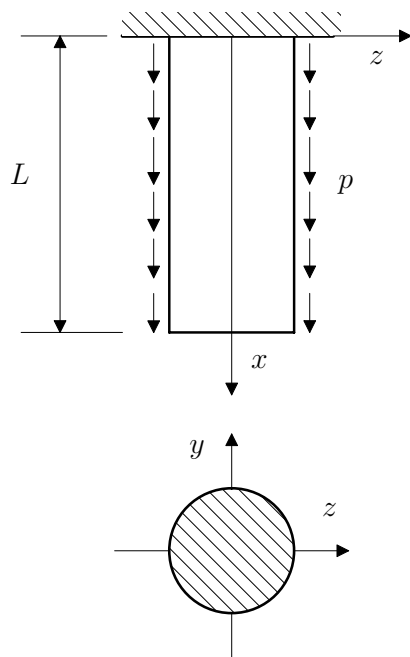
Dirihlē (1805-1859) ir vācu matemātiķis, kura viens no skolotājiem bija Oms (Oma likums elektrotehnikā). Viņš bija cieši saistīts ar tādiem pazīstamiem vācu matemātiķiem kā Jakobi (Dirihlē sievastēvs) un Gauss, kurš bija Dirihlē priekštecis matemātikas profesora vietā Gētingenes universitātē.

# Nodaļa 2

## Viendimensiju problēmas

### 2.1 Stieņa potenciālā enerģija

Aplūkosim stieni (sk. Zīm. 2.1) kā viendimensiju konstrukciju. Šim stienim, kas ir visvienkāršākā konstrukcija, izvedīsim galīgo elementu metodes sakarības. Līdzīgu procedūru lieto arī sarežģītākām konstrukcijām.



Zīmējums 2.1: Stiepts stienis

Viendimensiju gadījumā spriegumi  $\sigma$ , deformācijas  $\epsilon$ , pārvietojumi  $u$  un

slodzes  $p$  ir atkarīgi tikai no mainīgā  $x$

$$u = u(x), \quad \sigma = \sigma(x), \quad \epsilon = \epsilon(x), \quad p = p(x) \quad (2.1)$$

Viendimensiju gadījumā tilpuma elementu  $dV$  var izteikt

$$dV = A dx$$

kur  $A$  ir stieņa šķērsriezuma laukums. Šim gadījumam Huka likums ir

$$\sigma = E\epsilon \quad (2.2)$$

kinemātiskās sakarības ir

$$\epsilon = \frac{du}{dx} \quad (2.3)$$

un stieņa deformācijas enerģija ir

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma^T \epsilon dV = \frac{1}{2} \int_L A \sigma^T \epsilon dx \quad (2.4)$$

kur  $L$  ir stieņa garums. Ievietojot izteiksmē (2.4) Huka likumu (2.2) un kinemātiskās sakarības (2.3), iegūstam stieņa deformācijas enerģijas funkcionāli

$$U = \frac{1}{2} \int_L A \epsilon^T E \epsilon dx = \frac{1}{2} \int_L EA \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx \quad (2.5)$$

Konstrukcijas pilnā potenciālā enerģijas izteiksme ir

$$\Pi = U - W \quad (2.6)$$

Ārējo spēku darbs ir

$$W = \int_{L_*} p u dx \quad (2.7)$$

kur  $L_*$  ir stieņa gabals, uz kuru darbojas slodze. Tātad konstrukcijas potenciālās enerģijas funkcionālis ir

$$\Pi[u(x)] = \frac{1}{2} \int_L EA \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx - \int_{L_*} p u dx \quad (2.8)$$

Bez tam vēl ir jāformulē kinematiskie robežnoteikumi. Zīm. 2.1 attēlotam stienim tie ir

$$u \Big|_{x=0} = 0$$

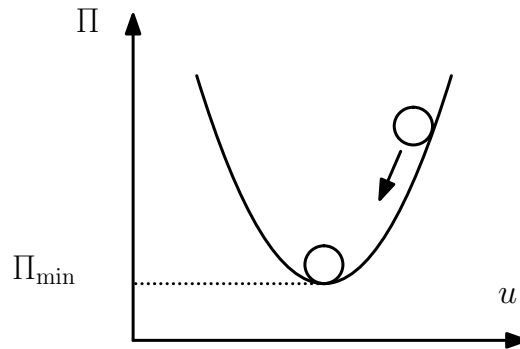
Tātad esam ieguvuši sakarības, lai ar Ritca vai galīgo elementu metodi risinātu stieņa deformēšanās uzdevumus.

## 2.2 Variāciju vienādojums

Zīm. 2.2 attēlota potenciālās enerģijas funkcionālā atkarība no pārvietojumu funkcijas  $u(x)$ . Tā kā  $u(x)$  ir funkcija no  $x$ , tad potenciālā enerģija ir funkcija no funkcijas. Tādu matemātisku objektu sauc par funkcionāli. Funkcionāļa minimuma nosacījums ir

$$\delta\Pi[u(x)] = 0 \quad (2.9)$$

kur  $\delta$  nozīmē funkcionāļa variāciju pēc pārvietojumiem. Variēšanas operācija funkcionālim ir līdzīga kā diferenciēšanas operācija funkcijai.



Zīmējums 2.2: Potenciālās enerģijas minimums

Variējot funkcionāli (2.8) un integrējot pa daļām iegūstam problēmas variāciju vienādojumu

$$\begin{aligned} \delta\Pi &= \delta U - \delta W = \int_0^L EA \frac{du}{dx} \frac{d\delta u}{dx} dx - \int_0^L p \delta u dx \\ &= EA \delta u \frac{du}{dx} \Big|_0^L - \int_0^L EA \delta u \frac{d^2 u}{dx^2} dx - \int_0^L p \delta u dx = 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Variācijas visā stienī ir patvaļīgas, tāpēc  $\delta u \neq 0$ , izņemot pie  $x = 0$ , kur  $u = 0$ , tātad tur arī  $\delta u = 0$ . Tāpēc no variāciju vienādojuma seko

$$EA \frac{d^2 u}{dx^2} + p = 0 \quad (2.11)$$

un

$$N = EA \frac{du}{dx} = 0 \Big|_{x=L} \quad (2.12)$$

kur  $N = \sigma A$  ir aksiālais spēks stienī. Vienādojums (2.11) ir stienļa līdzsvara vienādojums, bet nosacījumi (2.12) ir uzdevuma statistieki (dabīgie)

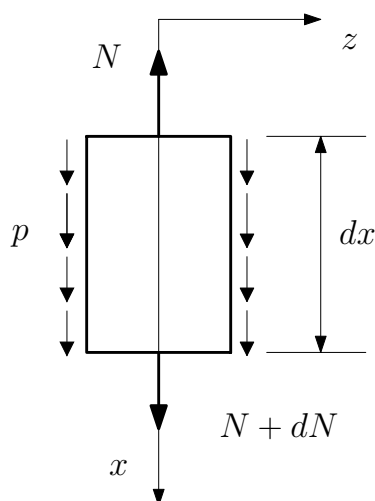
robežnoteikumi. Atgādināsim, ka uzdevuma kinemātiskie (galvenie) robežnoteikumi ir

$$u = 0 \Big|_{x=L} \quad (2.13)$$

Kinemātiskos robežnoteikumus sauc par galveniem, jo tie ir jāizpilda, sākot risināt uzdevumu. Statikas robežnoteikumus sauc par dabīgiem, jo tie izpildās automātiski, minimizējot funkcionāli.

## 2.3 Līdzsvara vienādojums

Zīm. 2.1 attēlotam stienim var iegūt līdzsvara vienādojumu, izmantojot līdzsvara principu. Šim nolūkam aplūko elementa  $dx$  līdzsvaru (sk. Zīm. 2.3). Stieņa elementu iegūst ar diviem šķēlumiem attālumā  $x$  un  $x + dx$ .



Zīmējums 2.3: Stieņa elementa  $dx$  līdzsvars

Stieņa elementa ārējo un iekšējo spēku līdzsvara nosacījums ir

$$\sum x = 0, \quad p dx + (N + dN) - N = 0 \quad (2.14)$$

no šejienes

$$\frac{dN}{dx} + p = 0 \quad (2.15)$$

Izmantojot kinemātiskās sakarības (2.3) un Huka likumu (2.2), aksiālo spēku var izteikt caur pārvietojumiem

$$N = A\sigma = AE\epsilon = EA\frac{du}{dx}$$

Ievietojot šo izteiksmi līdzsvara vienādojumā (2.15), iegūstam otrās kārtas diferenciālvienādojumu

$$EA\frac{d^2u}{dx^2} + p = 0 \quad (2.16)$$

Redzam, ka šis vienādojums sakrīt ar vienādojumu (2.11), kurš iegūts, izmantojot potenciālās enerģijas minimuma principu. Tātad ir divi ekvivalenti uzdevumu risināšanas ceļi

1. Izmantojot potenciālās enerģijas minimuma principu.
2. Izmantojot līdzsvara principu.

Tomēr datoraprēķiniem ļoti piemērots ir tieši pirmais risināšanas ceļš, kas balstās uz potenciālās enerģijas minimuma principu. Tas ir gan Rīta, gan galīgo elementu metodes pamatā.

## 2.4 Konstruktijas dalīšana galīgos elementos

Nepārtraukto konstrukciju, kas attēlota Zīm. 2.1, var sadalīt galīgos elementos. Vienkāršības dēļ tiek aplūkots (sk. Zīm. 2.4) dalījums divos galīgos elementos un konstants šķērsriezuma laukums, kaut gan tas nav būtiski.

Galīgie elementi tiek savienoti mezglu punktos. Lai apmierinātu kinemātiskos robežnoteikumus elementu savienojumu vietās, kā mezglu nezināmie tiek izvēlēti pārvietojumi (sk. Zīm. 2.5). Šie mezglu pārvietojumi ir galīgo elementu metodes nezināmie. Visi konstrukcijas mezgli tiek sanumurēti. Tā ir mezglu globālā numerācija.

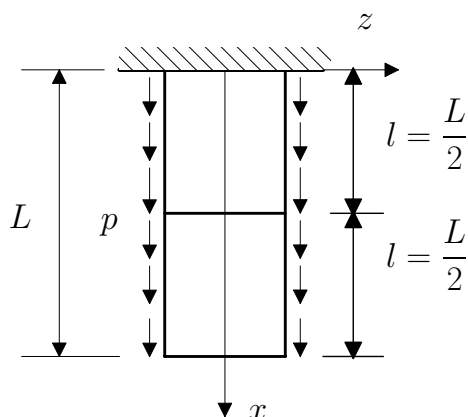
Tātad katram elementam ir divi mezgli. Elementi tiek sanumurēti. To numuri ir apvilkti ar apli, lai tos atšķirtu no mezglu numuriem. Katrā mezglā  $i$  ir viena brīvības pakāpe (DOF) - mezgla pārvietojums  $Q_i$  un viens mezgla spēks  $F_i$ . Atzīmēsim, ka tas ir ārējais spēks mezglā. Visas konstrukcijas (sk. Zīm. 2.5) pārvietojumu vektors ir

$$\mathbf{Q}^T = [Q_1, Q_2, Q_3] \quad (2.17)$$

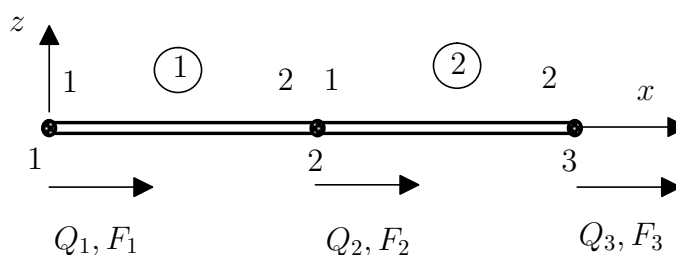
un mezglu spēku vektors ir

$$\mathbf{F}^T = [F_1, F_2, F_3] \quad (2.18)$$

Pārvietojumu un spēku pozitīvais virziens ir  $x$  ass virziens.



Zīmējums 2.4: Stieņa dalījums galīgos elementos



Zīmējums 2.5: Galīgo elementu savienojums

## 2.5 Galīgais elements

Zīm. 2.6 ir attēlots viens tipiskais galīgais elements. Šim elementam mezglu numurēšanai lieto tā saucamo lokālo numerāciju: kreisais mezgls ir 1, labais mezgls ir 2.

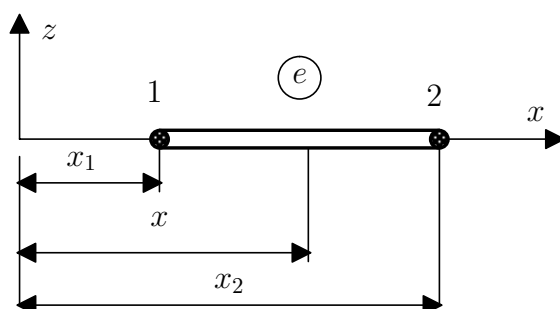
Galīgā elementa koordinātes var noteikt globālā koordinātu sistēmā  $x$ , bet ērtāk ir lietot lokālo koordinātu sistēmu  $-1 \leq \xi \leq 1$  (sk. Zīm. 2.7). Sakarības starp lokālo un globālo koordinātu sistēmu ir

$$\xi = \frac{2}{x_2 - x_1}(x - x_1) - 1, \quad l = x_2 - x_1 \quad (2.19)$$

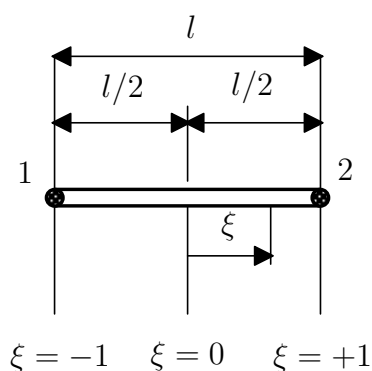
Tātad mezglā 1 ( $\xi = -1$ ), bet mezglā 2 ( $\xi = 1$ ).

Zīm. 2.7 ir attēloti arī mezglu pārvietojumi  $q_1$  un  $q_2$ , kā arī mezglu spēki  $f_1$  un  $f_2$ . Tie ir viena galīgā elementa mezglu pārvietojumu un mezglu spēku





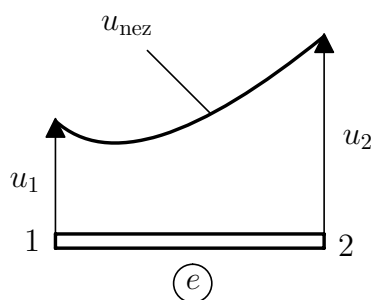
Zīmējums 2.6: Galīgais elements



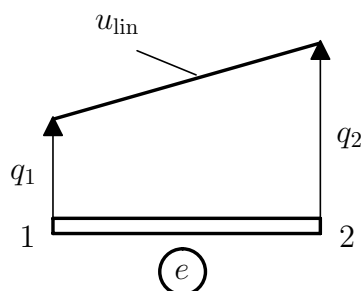
Zīmējums 2.7: Galīgais elements lokālā koordinātu sistēmā

apzīmējumi, lai tos atšķirtu no visas konstrukcijas mezglu pārvietojumiem  $Q_i$  un mezglu spēkiem  $F_i$ .

Nezināmā pārvietojumu funkcija elementā ir attēlota Zīm. 2.8. Šo funkciju var aproksimēt ar lineāru funkciju (sk. Zīm. 2.9).



Zīmējums 2.8: Pārvietojumu funkcija elementā

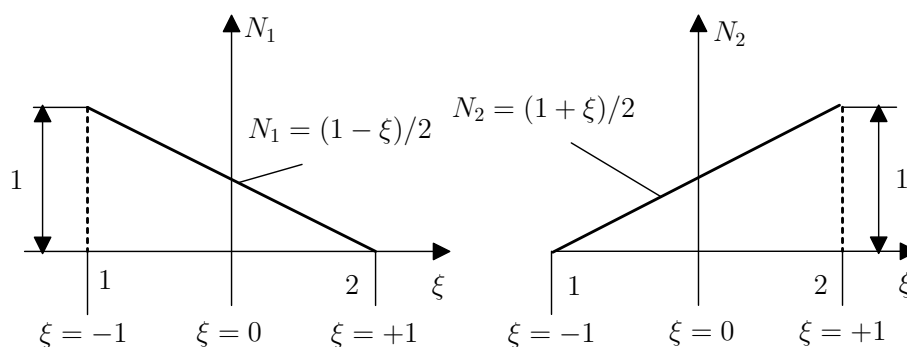


Zīmējums 2.9: Pārvietojumu funkcijas aproksimācija galīgā elementā

Lineāro aproksimāciju var izteikt ar tā saucamām formas funkcijām  $N_i$

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi), \quad N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (2.20)$$

Formas funkcijas  $N_1$  un  $N_2$  ir attēlotas Zīm. 2.10. Redzam, ka mezglā 1 funkcija  $N_1 = 1$  pie  $\xi = -1$ , bet mezglā 2 funkcija  $N_1 = 0$  pie  $\xi = 1$ . Tāpat mezglā 2 funkcija  $N_2 = 1$  pie  $\xi = 1$ , bet mezglā 1 funkcija  $N_2 = 0$  pie  $\xi = -1$ .

Zīmējums 2.10: Formas funkcijas  $N_1$  un  $N_2$ 

Tā kā formas funkcijas ir definētas, tad tās var izmantot pārvietojumu aproksimācijā. Un tā, pārvietojumus galīgā elementā var izteikt caur elementa mezglu pārvietojumiem  $q_1$  un  $q_2$  (sk. Zīm. 2.11)

$$u = N_1 q_1 + N_2 q_2 \quad (2.21)$$

vai matricu pierakstā

$$u = \mathbf{N} \mathbf{q} \quad (2.22)$$

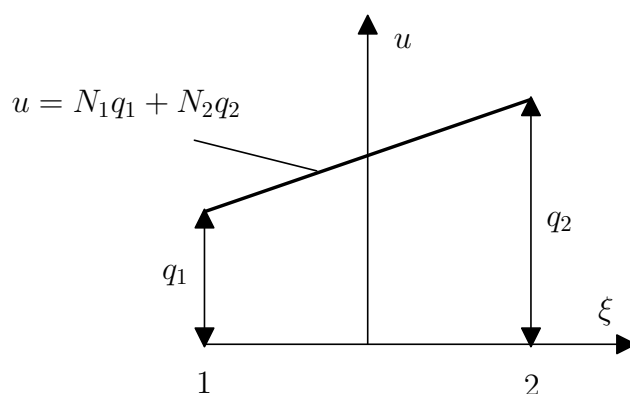
kur

$$\mathbf{N} = [N_1, N_2]$$

ir formas funkciju matrica, un

$$\mathbf{q}^T = [q_1, q_2]$$

ir pārvietojumu matrica.



Zīmējums 2.11: Lineārā interpolācija elementā, izmantojot formas funkcijas  $N_1$  un  $N_2$

No formulas (2.19) var iegūt sakarību starp globālām  $x$  un lokālām  $\xi$  koordinātēm. Šo koordinātu transformāciju var izteikt ar formas funkcijām

$$x = N_1 x_1 + N_2 x_2 \quad (2.23)$$

kur  $x_1$  un  $x_2$  ir stieņa mezglu koordinātes globālajā koordinātu sistēmā (sk. Zīm. 2.6). Ja pārvietojumi  $u$  un koordinātes  $x$  elementā tiek interpolētas ar vienādām formas funkcijām, tad tādu galīgo elementu sauc par izoparametrisku elementu.

Apskatot jautājumu, kādas formas funkcijas varētu lietot aproksimācijā, var formulēt šādas prasības.

1. Formas funkciju pirmajam atvasinājumam jābūt galīgam lielumam.
2. Pārvietojumiem jābūt nepārtrauktiem elementu savienojumu vietās.

Redzam, ka funkcijas  $N_1$  un  $N_2$  apmierina šos noteikumus.

Tālāk izteiksim deformācijas elementā caur elementa mezglu pārvietojumiem  $\mathbf{q}$ . No formulām (2.3) un (2.19) iegūstam

$$\epsilon = \frac{du}{dx} = \frac{du}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \quad (2.24)$$

kur

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{x_2 - x_1} = \frac{2}{l} \quad (2.25)$$

No formulām (2.20) un (2.21) izriet

$$u = N_1 q_1 + N_2 q_2 = \frac{1 - \xi}{2} q_1 + \frac{1 + \xi}{2} q_2 \quad (2.26)$$

No šejienes

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{1}{2}(-q_1 + q_2) \quad (2.27)$$

Ievietojot šo izteiksmi formulā (2.24), iegūstam

$$\epsilon = \frac{1}{l}(-q_1 + q_2) \quad (2.28)$$

jeb matricu formā

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B}\mathbf{q} \quad (2.29)$$

kur

$$\mathbf{B} = \frac{1}{l}[-1 \quad 1] \quad (2.30)$$

Tālāk, izmantojot Huka likumu (2.2), iegūstam

$$\sigma = E\epsilon = E\mathbf{B}\mathbf{q} = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{q} \quad (2.31)$$

kur

$$\mathbf{D} = E$$

vispārējā gadījumā var būt matrica, kas satur materiāla elastības konstantes. Šajā gadījumā ir tikai viena konstante  $E$ .

Un tā elementam mēs esam ieguvuši 3 sakarības.

1. Pārvietojumu aproksimāciju:  $\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{q}$ .
2. Kinemātiskās sakarības:  $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B}\mathbf{q}$ .
3. Huka likumu:  $\sigma = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{q}$ .

Šīs sakarības tiek izmantotas, lai iegūtu galīgā elementa stinguma matricu.

### 2.5.1 Elementa stinguma matrica

Galīgā elementa stinguma matricu iegūstam, minimizējot potenciālās enerģijas funkcionāli. Uzrakstam funkcionāļus (2.4) un (2.7) matricu formā

$$\Pi = U - W = \frac{1}{2}A \int_0^L \sigma^T \epsilon dx - \int_0^L u^T p dx \quad (2.32)$$

Potenciālo enerģiju visai konstrukcijai var uzrakstīt diskrētā formā

$$\Pi = \sum_e \Pi_e = \sum_e \frac{1}{2}A \int_e \sigma^T \epsilon dx - \sum_e \int_e u^T p dx \quad (2.33)$$

vai

$$\Pi = \sum_e \Pi_e = \sum_e U_e - \sum_e W_e \quad (2.34)$$

Šeit viena galīgā elementa deformācijas enerģija ir

$$U_e = \frac{1}{2}A \int_e \sigma^T \epsilon dx = \frac{1}{2}A \int_0^l \sigma^T \epsilon dx \quad (2.35)$$

un elementa ārējo spēku darbs ir

$$W_e = \frac{1}{2} \int_e u^T p dx = \frac{1}{2} \int_0^l u^T p dx \quad (2.36)$$

Ievietojot izteiksmē (2.35) formulas (2.29) un (2.31), iegūstam

$$U_e = \frac{1}{2}A \int_0^l \sigma^T \epsilon dx = \frac{1}{2}A \int_0^l \mathbf{q}^T \mathbf{B}^T E \mathbf{B} \mathbf{q} dx = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K}_e \mathbf{q} \quad (2.37)$$

kur  $\mathbf{K}_e$  ir galīgā elementa stinguma matrica

$$\mathbf{K}_e = A \int_0^l \mathbf{B}^T E \mathbf{B} dx \quad (2.38)$$

Šo matricu var nointegrēt analītiski. No formulas (2.19) iegūstam

$$dx = \frac{l}{2} d\xi \quad (2.39)$$

un formulu (2.38) pārveidojam

$$\mathbf{K}_e = A \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}^T E \mathbf{B} \frac{l}{2} d\xi \quad (2.40)$$

Tā kā

$$\mathbf{B} = \frac{1}{l}[-1 \ 1]$$

tad

$$\mathbf{K}_e = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

jeb sareizinot matricas

$$\mathbf{K}_e = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Redzam, ka elementa stinguma matrica ir simetriska matrica  $K_{12}^e = K_{21}^e$ , vai vispārīgā veidā  $K_{ij}^e = K_{ji}^e$ .

### 2.5.2 Elementa ārējie spēki

Energētiski ekvivalentos elementa ārējos spēku var noteikt, izmantojot ārējo spēku darba izteiksmi (2.36) un aproksimāciju (2.26)

$$W_e = \int_0^l u^T p dx = \int_0^l (N_1 q_1 + N_2 q_2) p dx \quad (2.43)$$

Šo izteiksmi uzrakstām sekojošā formā

$$W_e = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \int_0^l N_1 dx \\ p \int_0^l N_2 dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \mathbf{q}^T \mathbf{f} \quad (2.44)$$

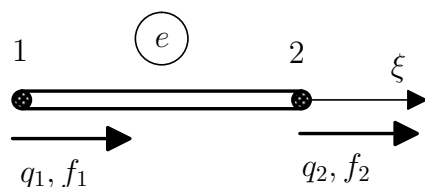
kur elementa ārējo spēku vektors ir

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{pl}{2} \\ \frac{pl}{2} \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

Šī izteiksme iegūta, izskaitļojot šādus integrāļus

$$\begin{aligned} \int_0^l N_1 dx &= \frac{l}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2}(1 - \xi) d\xi = \frac{l}{2} \\ \int_0^l N_2 dx &= \frac{l}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2}(1 + \xi) d\xi = \frac{l}{2} \end{aligned} \quad (2.46)$$

Tipiskais galīgais elements ar mezglu spēkiem un mezglu pārvietojumiem ir attēlots Zīm. 2.12



Zīmējums 2.12: Galīgais elements ar mezglu spēkiem un mezglu pārvietojumiem

## 2.6 Galīgo elementu montāža konstrukcijā

Aplūkosim galīgo elementu montāžu konstrukcijā, kas attēlota Zīm. 2.4. Šai galīgo elementu montāžai var uzrakstīt tā saucamo savienojumu matricu. Tā attēlota Tabulā 2.6.

Tabula 2.1: Galīgo elementu savienojumu matrica

Elements	Mezgli		Numerācija
$e$	1	2	Lokālie numuri
1	1	2	Globālie numuri
2	2	3	Globālie numuri

Šī savienojumu matrica nosaka, kādā veidā galīgie elementi ir samontēti konstrukcijā. Lielai konstrukcijai šo savienojumu matricu neveido ar roku, bet izmantojot speciālas ģeometrisku objektu modelēšanas programmas.

Ievietojot formulā (2.34) elementa deformācijas enerģijas (2.37) un ārējo spēku darba (2.44) izteiksmes, iegūstam

$$\Pi = \sum_e \Pi_e = \sum_e \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K}_e \mathbf{q} - \sum_e \mathbf{q}^T \mathbf{f} \quad (2.47)$$

Šeit visas konstrukcijas potenciālā enerģija ir izteikta ar katra elementa mezglu pārvietojumiem  $\mathbf{q}$ , kas ir tie paši visas konstrukcijas mezglu pārvietojumi  $\mathbf{Q}$ . Tikai  $\mathbf{q}$  tiek definēti katram elementam atsevišķi, bet  $\mathbf{Q}$  tiek definēti visai konstrukcijai. Sakarību starp elementa pārvietojumiem  $\mathbf{q}$  un visas konstrukcijas pārvietojumiem  $\mathbf{Q}$  nosaka Tabulā 2.6 definētā galīgo elementu savienojumu matrica (sk. Zīm. 2.5). Tā elementam 1 vektors  $\mathbf{q}^T = [Q_1, Q_2]$ , bet elementam 2 vektors  $\mathbf{q}^T = [Q_2, Q_3]$ . Tāpēc visas konstrukcijas potenciālo enerģiju (2.47) var izteikt ar visas konstrukcijas parametriem

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{Q}^T \mathbf{K} \mathbf{Q} - \mathbf{Q}^T \mathbf{F} \quad (2.48)$$

kur  $\mathbf{K}$  ir visas konstrukcijas stinguma matrica,  $\mathbf{Q}$  un  $\mathbf{F}$  ir visas konstrukcijas mezglu pārvietojumu un mezglu spēku vektori.

Aplūkosim sīkāk kā iegūst visas konstrukcijas stinguma matricu  $\mathbf{K}$ . Tātad visas konstrukcijas deformācijas enerģija  $U$  ir katra atsevišķa galīgā elementa deformācijas enerģijas  $U_e$  summa

$$U = \sum_e U_e = \frac{1}{2} \mathbf{Q}^T \sum_e \mathbf{K}_e \mathbf{Q} = \frac{1}{2} \mathbf{Q}^T \mathbf{K} \mathbf{Q} \quad (2.49)$$

kur

$$\mathbf{K} = \sum_e \mathbf{K}_e \quad (2.50)$$

Zīm. 2.5 attēlotā konstrukcijā ir 2 elementi, kuru deformācijas enerģijas ir

$$U_1 = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K}_1 \mathbf{q}, \quad U_2 = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K}_2 \mathbf{q} \quad (2.51)$$

vai

$$U_1 = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{q} \quad (2.52)$$

$$U_2 = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{q} \quad (2.53)$$

Atgādināsim, ka

$$\text{Elementam 1 : } \mathbf{q}^T = [Q_1 \quad Q_2] \quad (2.54)$$

$$\text{Elementam 2 : } \mathbf{q}^T = [Q_2 \quad Q_3] \quad (2.55)$$

Elementa 1 deformācijas enerģiju var izteikt ar visas konstrukcijas pārvietojumu vektoru

$$U_1 = \frac{1}{2} [Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3] \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

Tāpat elementa 2 deformācijas enerģiju var izteikt ar visas konstrukcijas pārvietojumu vektoru

$$U_2 = \frac{1}{2} [Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3] \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} \quad (2.57)$$



Visas konstrukcijas deformācijas enerģija ir

$$U = U_1 + U_2 \quad (2.58)$$

vai, saskaitot matricas (2.56) un (2.57)

$$U = \frac{1}{2} [ Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 ] \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

Matricu pierakstā šī izteiksme ir

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{Q}^T \mathbf{K} \mathbf{Q} \quad (2.60)$$

Līdzīgā veidā iegūst visas konstrukcijas mezglu spēkus. Šim nolūkam katra elementa ārējo spēku darbu  $W_e$  (sk. formulas (2.44) un (2.45)) izsaka caur visas konstrukcijas pārvietojumu vektoru  $\mathbf{Q}$ . Elementam 1 tas ir

$$W_1 = [ Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 ] \begin{bmatrix} \frac{pl}{2} \\ \frac{pl}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

Elementam 2 tas ir

$$W_2 = [ Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 ] \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{pl}{2} \\ \frac{pl}{2} \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

Visas konstrukcijas ārējo spēku darbs ir

$$W = W_1 + W_2 \quad (2.63)$$

jeb, saskaitot matricas (2.61) un (2.62), iegūstam

$$W = [ Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 ] \begin{bmatrix} \frac{pl}{2} \\ \frac{pl}{2} \\ \frac{pl}{2} \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

vai matricu pierakstā

$$W = \mathbf{Q}^T \mathbf{F} = Q_1 F_1 + Q_2 F_2 + Q_3 F_3 \quad (2.65)$$

## 2.7 GEM uzdevuma risināšanas algoritms

Tātad esam noteikuši visas konstrukcijas raksturojošās matricas: stinguma matricu  $\mathbf{K}$  un ārējo spēku vektoru  $\mathbf{F}$ . Nezināmie ir mezglu pārvietojumi  $\mathbf{Q}$ . Visas konstrukcijas potenciālā enerģija ir

$$\Pi(Q_i) = \frac{1}{2} \mathbf{Q}^T \mathbf{K} \mathbf{Q} - \mathbf{Q}^T \mathbf{F} \quad (2.66)$$

Tātad potenciālā enerģija ir kvadrātiska funkcija no mezglu pārvietojumiem  $Q_i$ . Funkcijas minimuma noteikums ir

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{Q}^T} = 0 \quad (2.67)$$

Atvasinājot, iegūstam lineāru vienādojumu sistēmu

$$\mathbf{K} \mathbf{Q} = \mathbf{F} \quad (2.68)$$

To atrisinot, iegūstam mezglu pārvietojumus

$$\mathbf{Q} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F} \quad (2.69)$$

Vienādojumu sistēmas (2.68) atrisināšanai parasti lieto Gausa metodi, kas ir viena no labākajām šāda tipa uzdevumiem.

Šajā piemērā ar 2 elementiem stinguma matricu  $\mathbf{K}$  nosaka formula (2.59). Ņemot vērā, ka  $Q_1 = 0$  (robežnoteikums) vienādojumu sistēmas atrisinājumu var iegūt analītiskā formā

$$Q_2 = \frac{3pL^2}{8EA}, \quad Q_3 = \frac{1pL^2}{2EA} \quad (2.70)$$

Atzīmējam, ka  $l = L/2$ . Tad, kad ir iegūtas mezglu pārvietojumu vērtības, ar formulu (2.31) katrā elementā var izskaitļot spriegumus. Elementa 1 raksturojošie lielumi ir

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = \frac{3pL^2}{8EA}, \quad \mathbf{q}^T = [Q_1 \quad Q_2], \quad \mathbf{B} = \frac{2}{L}[-1 \quad 1] \quad (2.71)$$

un spriegumi elementā 1 ir

$$\sigma = E \mathbf{B} \mathbf{q} = \frac{2E}{L} [-1 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3pL^2}{8EA} \end{bmatrix} = \frac{3pL^2}{4A} \quad (2.72)$$

Ass spēks elementā 1 ir

$$N = \sigma A = \frac{3}{4} pL \quad (2.73)$$

Elementa 2 raksturojošie lielumi ir

$$Q_2 = \frac{3pL^2}{8EA}, \quad Q_3 = \frac{1pL^2}{2EA}, \quad \mathbf{q}^T = [Q_2 \quad Q_3], \quad \mathbf{B} = \frac{2}{L}[-1 \quad 1] \quad (2.74)$$

un spriegumi elementā 2 ir

$$\sigma = E\mathbf{B}\mathbf{q} = \frac{2E}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3pL^2}{8EA} \\ \frac{1pL^2}{2EA} \end{bmatrix} = \frac{1pL^2}{4A} \quad (2.75)$$

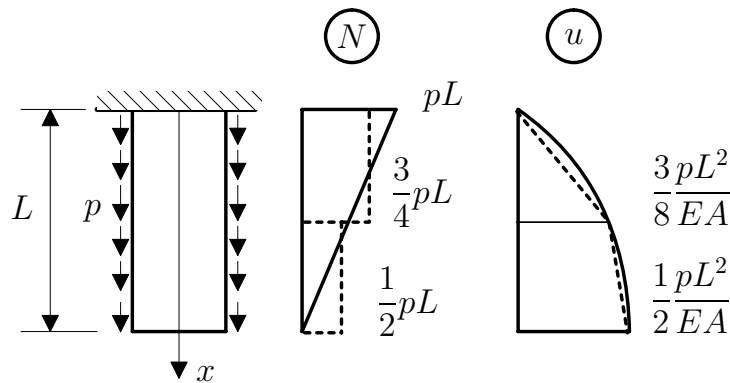
Ass spēks elementā 2 ir

$$N = \sigma A = \frac{1}{4}pL \quad (2.76)$$

Zīm. 2.7 parādīts atrisinājums ar GEM (pārtrauktās līnijas) un analītiskais atrisinājums (nepārtrauktās līnijas). Redzam, ka pat ar 2 galīgiem elementiem pārvietojumi ir noteikti pietiekoši precīzi. Tomēr spriegumu noteikšanā ir 25% kļūda. Atzīmējam, ka analītisko atrisinājumu viegli iegūt ar šķēluma metodi: nosaka ass spēku  $N$ , tad  $\sigma$ , no Huka likuma  $\epsilon$ , un, nointegrējot kinemātiskās sakarības (2.3) (robežnoteikumi  $u = 0$  pie  $x = 0$ ), iegūstam

$$u = \frac{p}{EA}\left(Lx - \frac{x^2}{2}\right), \quad \epsilon = \frac{du}{dx} = \frac{p}{EA}(L - x), \quad (2.77)$$

$$\sigma = \frac{p}{A}(L - x), \quad N = p(L - x)$$



Zīmējums 2.13: Uzdevuma atrisinājums: - - - GEM; — Analītiskais

Neatkarīgi no elementu skaita (un pat elementa tipa) GEM algoritms ir vienāds. To var izmantot jebkuras konstrukcijas aprēķinā.

GEM algoritms ir sekojošs.

1. Izvēlas galīgo elementu.
2. Uzraksta pārvietojumu aproksimāciju:  $\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{q}$ .
3. Uzraksta potenciālo enerģiju  $\Pi_e$  elementam.
4. Uzraksta Huka likumu:  $\sigma = E\epsilon$ .
5. Uzraksta kinemātiskās sakarības elementam:  $\epsilon = \mathbf{B}\mathbf{q}$ .
6. Uzraksta potenciālo enerģiju elementam diskrētā formā:  $\Pi_e = \frac{1}{2}\mathbf{q}^T \mathbf{K}_e \mathbf{q} - \mathbf{q}^T \mathbf{f}$ .
7. Uzraksta galīgo elementu savienojumu matricu.
8. Summējot elementa matricas, nosaka visas konstrukcijas stinguma matricu un mezglu spēka vektoru:  $\mathbf{K} = \sum_e \mathbf{K}_e$ ,  $\mathbf{F} = \sum_e \mathbf{f}$ .
9. Uzraksta konstrukcijas potenciālo enerģiju:  $\Pi = \frac{1}{2}\mathbf{Q}^T \mathbf{K} \mathbf{Q} - \mathbf{Q}^T \mathbf{F}$ .
10. Atrod potenciālās enerģijas minimumu:  $\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{Q}^T} = 0$ .
11. Iegūst lineāru vienādojumu sistēmu:  $\mathbf{K}\mathbf{Q} = \mathbf{F}$ .
12. Atrisinā vienādojumu sistēmu:  $\mathbf{Q} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}$ .
13. Izskaitļo spriegumus katrā elementā:  $\sigma = E\mathbf{B}\mathbf{q}$ .

### 2.7.1 GEM programma

Uz augstāk aplūkotā algoritma pamata var uzrakstīt datorprogrammu. *Basic* valodā uzrakstītā programma FEM1D ir paņemta no mācību grāmatas [11]. Tālāk dots programmas teksts.

```
1000 REM ***** FEM1D *****
1010 REM One Dimensional Problem with Temperature
```

```

1020 DEFINT I-N: CLS
1030 PRINT "=====
1040 PRINT " Program written by "
1050 PRINT " T.R.Chandrupatla and A.D.Belegundu "
1060 PRINT "=====
1070 INPUT " Number of Elements ="; NE
1080 INPUT " Number of Loads ="; NL
1090 INPUT " Num of Constr Nodes ="; ND
1100 NN = NE + 1
1110 NBW = 2
1120 DIM X(NN), A(NE), NU(ND), U(ND), DT(NE),AL(NL),ILD(NL)
1130 DIM S(NN, NBW), F(NN), E(NE),
ALP(NE),STRESS(NE),REACT(ND)
1140 PRINT "Elem#, Area, E, Alpha, Temp Rise"
1150 FOR I = 1 TO NE
1160 INPUT N, A(N), E(N), ALP(N), DT(N): NEXT I
1170 PRINT "Node#, Coordinate"
1180 FOR I = 1 TO NN
1190 INPUT N, X(N): NEXT I
1200 FOR I = 1 TO NN
1210 F(I) = 0
1220 FOR J = 1 TO NBW
1230 S(I, J) = 0: NEXT J: NEXT I
1240 PRINT "Node#, Displacement"
1250 FOR I = 1 TO ND
1260 INPUT NU(I), U(I): NEXT I
1270 IF NL = 0 THEN GOTO 1330
1280 PRINT "Node#, Applied Load"
1290 FOR I = 1 TO NL
1300 INPUT N, F(N)
1310 ILD(I)=N : AL(I)=F(N) : NEXT I
1320 REM *** STIFFNESS MATRIX ***
1330 FOR I = 1 TO NE
1340 I1 = I: I2 = I + 1
1350 X21 = X(I2) - X(I1): EL = ABS(X21)
1360 EAL = E(I) * A(I) / EL
1370 TL = E(I) * ALP(I) * DT(I) * A(I) * EL / X21
1380 REM *** TEMPERATURE LOADS ***
1390 F(I1) = F(I1) - TL
1400 F(I2) = F(I2) + TL
1410 REM *** ELEMENT STIFFNESSES ***

```

```

1420 S(I1, 1) = S(I1, 1) + EAL
1430 S(I2, 1) = S(I2, 1) + EAL
1440 S(I1, 2) = S(I1, 2) - EAL: NEXT I
1450 REM *** MODIFY FOR BOUNDARY CONDITION ***
1460 CNST = S(1, 1) * 10000
1470 FOR I = 1 TO ND
1480 N = NU(I)
1490 S(N, 1) = S(N, 1) + CNST
1500 F(N) = F(N) + CNST * U(I): NEXT I
1510 REM *** EQUATION SOLVING ***
1520 GOSUB 5000
1530 PRINT "NODE NO.", "DISPLACEMENT"
1540 FOR I = 1 TO NN
1550 PRINT I, F(I): NEXT I
1560 REM *** STRESS CALCULATION ***
1570 PRINT "ELEM NO.", "STRESS"
1580 FOR I = 1 TO NE
1590 EPS = (F(I + 1) - F(I)) / (X(I + 1) - X(I))
1600 STRESS(I) = E(I) * (EPS - ALP(I) * DT(I))
1610 PRINT I, STRESS(I): NEXT I
1620 REM *** REACTION CALCULATION ***
1630 PRINT "NODE NO.", "REACTION"
1640 FOR I = 1 TO ND
1650 N = NU(I)
1660 R = CNST * (U(I) - F(N))
1670 REACT(I) = R
1680 PRINT N, R: NEXT I
1690 INPUT "DO YOU WISH TO SAVE THE OUTPUT (Y/N) ";ANS$
1700 IF ANS$ <> "y" AND ANS$ <> "Y" GOTO 1960
1710 INPUT "GIVE NAME OF OUTPUT FILE =";FILENAME$
1720 OPEN FILENAME$ FOR OUTPUT AS #2
1730 PRINT #2,"NE,NL,ND =",NE,NL,ND
1740 PRINT #2,"ELEM#, AREA, E, ALPHA, TEMP. RISE"
1750 FOR I = 1 TO NE
1760 PRINT #2,I,A(I),E(I),ALP(I),DT(I) :NEXT I
1770 PRINT #2,"NODE#, COORDINATE"
1780 FOR I = 1 TO NN
1790 PRINT #2,I,X(I) :NEXT I
1800 PRINT #2, "NODE#, SPECIFIED DISPLACEMENT"
1810 FOR I = 1 TO ND
1820 PRINT #2, NU(I),U(I) :NEXT I

```

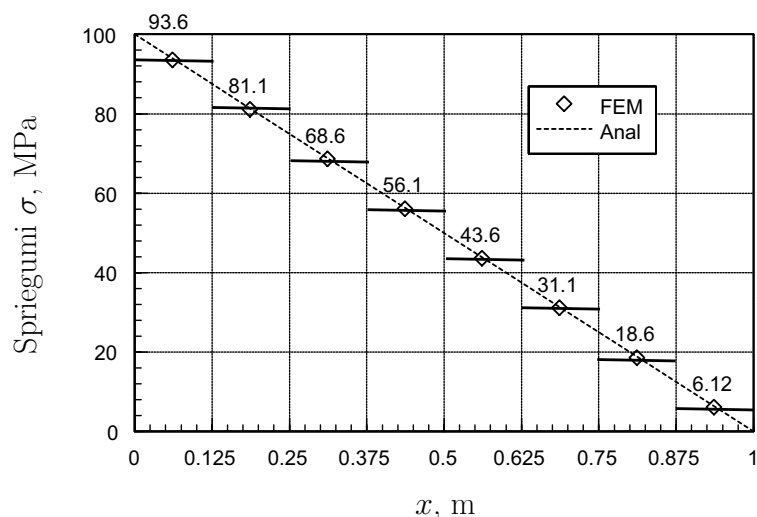
```
1830 PRINT #2,"NODE#, APPLIED LOAD"
1840 FOR I=1 TO NL
1850 PRINT #2,ILD(I), AL(I) : NEXT I
1860 PRINT #2,"NODE#, DISPLACEMENT"
1870 FOR I = 1 TO NN
1880 PRINT #2, I, F(I) :NEXT I
1890 PRINT #2,"ELEMENT#, STRESS"
1900 FOR I=1 TO NE
1910 PRINT #2, I, STRESS(I) :NEXT I
1920 PRINT #2, "SUPPORT#, REACTION FORCE"
1930 FOR I=1 TO ND
1940 PRINT #2,NU(I),REACT(I) :NEXT I
1950 CLOSE #2
1960 END
5000 N=NN
5010 REM ** FORWARD ELIMINATION **
5020 FOR K = 1 TO N - 1
5030 NBK = N - K + 1
5040 IF N - K + 1 > NBW THEN NBK = NBW
5050 FOR I = K + 1 TO NBK + K - 1
5060 I1 = I - K + 1
5070 C = S(K, I1) / S(K, 1)
5080 FOR J = I TO NBK + K - 1
5090 J1 = J - I + 1
5100 J2 = J - K + 1
5110 S(I, J1) = S(I, J1) - C * S(K, J2): NEXT J
5120 F(I) = F(I) - C * F(K)
5130 NEXT I: NEXT K
5140 REM ** BACK SUBSTITUTION **
5150 F(N) = F(N) / S(N, 1)
5160 FOR II = 1 TO N - 1
5170 I = N - II
5180 NBI = N - I + 1
5190 IF N - I + 1 > NBW THEN NBI = NBW
5200 SUM = 0!
5210 FOR J = 2 TO NBI
5220 SUM = SUM + S(I, J) * F(I + J - 1): NEXT J
5230 F(I) = (F(I) - SUM) / S(I, 1): NEXT II
5240 RETURN
```

Šo programmu var translēt ar jebkuru *Basic* kompilātoru, piemēram, Mi-

crosoft *Quick Basic*.

## 2.7.2 Uzdevuma aprēķins ar datorprogrammu FEM1D

No Zīm. 2.7 mēs redzam, ka, lai iegūtu pietiekoši precīzas spriegumu vērtības, ir nepieciešams smalkāks konstrukcijas sadalījums galīgos elementos. Zīm. 2.14 ir attēloti spriegumi pie dalījuma NE=8, kas iegūti ar programmu FEM1D. Spriegumi ir aprēķināti elementu centros. Zīm. 2.15 ir attēlota maksimālo spriegumu konverģence attiecībā pret analītisko risinājumu (2.77). Zīm. 2.16 ir attēlota maksimālo pārvietojumu (pie  $x = L$ ) konverģence attiecībā pret analītisko risinājumu (2.77). Redzam, ka pārvietojumu konverģences ātrums ir ievērojami lielāks nekā spriegumiem. Tomēr, dalot smalkāk, arī spriegumi konverģē uz precīzo vērtību.



Zīmējums 2.14: Uzdevuma atrisinājums ar datorprogrammu FEM1D: NE=8

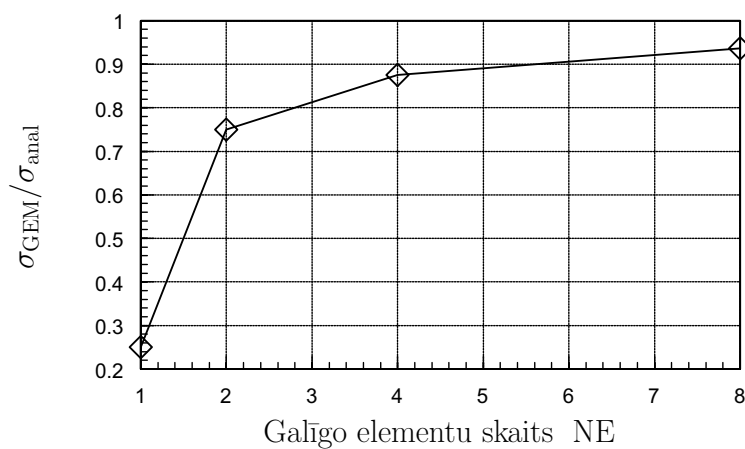
Skaitliskam risinājumam tika pieņemti sekojoši izejas dati

$$\begin{aligned}
 A &= 1\text{cm}^2 = 1 \cdot 10^{-4}\text{m}^2, & E &= 2 \cdot 10^5\text{MPa}, \\
 p &= 10^4\text{N/m}, & L &= 1\text{m}
 \end{aligned}
 \tag{2.78}$$

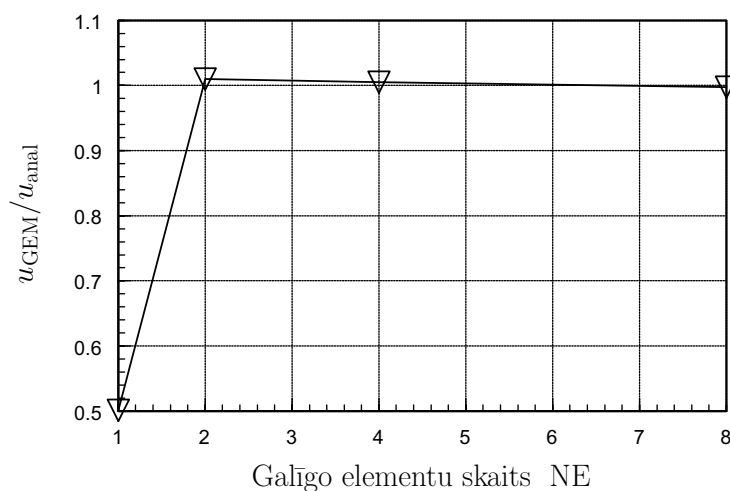
## 2.8 Potenciālās enerģijas novērtējums

Salīdzināsim potenciālo enerģiju precīzajam analītiskam atrisinājumam ar enerģiju tuvinātiem (Ritca metode un GEM) atrisinājumiem. Tātad





Zīmējums 2.15: Spriegumu konverģence



Zīmējums 2.16: Pārvietojumu konverģence

precīzais analītiskais atrisinājums (2.77) ir

$$u = \frac{p}{EA} \left( Lx - \frac{x^2}{2} \right), \quad \epsilon = \frac{du}{dx} = \frac{p}{EA} (L - x), \quad (2.79)$$

$$\sigma = \frac{p}{A} (L - x), \quad N = p(L - x)$$

Precīzā deformācijas enerģija ir

$$U_{\text{anal}} = \frac{1}{2} EA \int_0^L \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx = \frac{1}{6} \frac{p^2 L^3}{EA} \quad (2.80)$$

Precīzā ārējo spēku darba vērtība ir

$$W_{\text{anal}} = \int_0^L p u dx = \frac{1}{3} \frac{p^2 L^3}{EA} \quad (2.81)$$

Precīzā pilnā potenciālā enerģija ir

$$\Pi_{\text{anal}} = U_{\text{anal}} - W_{\text{anal}} = -\frac{1}{6} \frac{p^2 L^3}{EA} = -0.167 \frac{p^2 L^3}{EA} \quad (2.82)$$

Ar diviem elementiem (NE=2) GEM atrisinājums tika iegūts jau iepriekš (sk. formulas (2.64) un (2.70)). Mezglu pārvietojumi ir

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = \frac{3}{8} \frac{pL^2}{EA}, \quad Q_3 = \frac{1}{2} \frac{pL^2}{EA} \quad (2.83)$$

Mezglu spēki ir ( $L = 2l$ )

$$F_2 = \frac{1}{2} pL, \quad F_3 = \frac{1}{4} pL \quad (2.84)$$

Tātad deformācijas enerģija ir

$$U_{\text{GEM}} = \frac{1}{2} \mathbf{Q}^T \mathbf{K} \mathbf{Q} = \frac{5}{32} \frac{p^2 L^3}{EA} \quad (2.85)$$

un ārējo spēku darbs ir

$$W_{\text{GEM}} = \mathbf{Q}^T \mathbf{F} = \frac{5}{16} \frac{p^2 L^3}{EA} \quad (2.86)$$

Pilnā potenciālā enerģija ir

$$\Pi_{\text{GEM}} = U_{\text{GEM}} - W_{\text{GEM}} = -\frac{5}{32} \frac{p^2 L^3}{EA} = -0.156 \frac{p^2 L^3}{EA} \quad (2.87)$$

Redzam, ka GEM risinājums (tuvinātais) dod lielāku potenciālo enerģiju nekā analītiskais risinājums (precīzais).

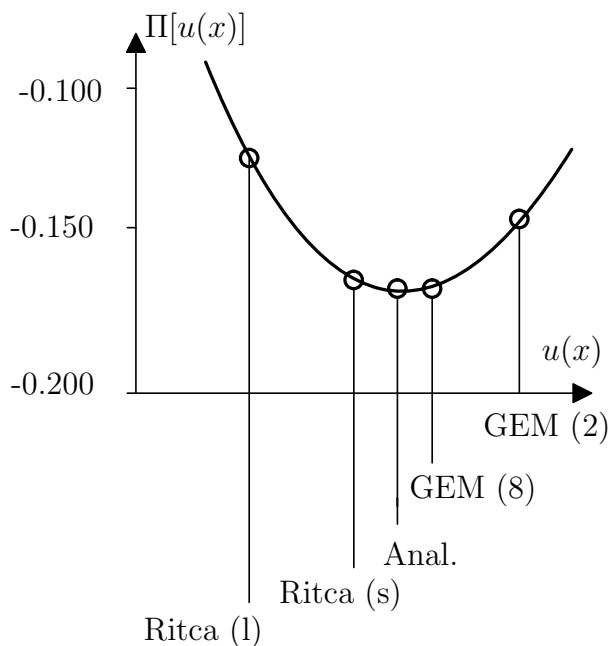
Salīdzināšanai dodam vēl potenciālās enerģijas vērtības, kas iegūtas ar Ritca metodi (studentiem rekomendējam pašiem iegūt atrisinājumu).

Ritca metodes risinājums ar vienu lineāru locekli ( $u = a_1 x$ )

$$\Pi_{\text{Ritca(l)}} = -\frac{1}{8} \frac{p^2 L^3}{EA} = -0.125 \frac{p^2 L^3}{EA} \quad (2.88)$$

Ritca metodes risinājums ar vienu locekli - sinus funkciju ( $u = a_1 \sin \frac{\pi x}{2L}$ )

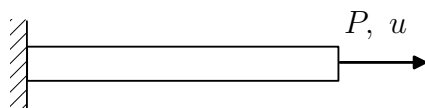
$$\Pi_{\text{Ritca(s)}} = -\frac{16}{\pi^4} \frac{p^2 L^3}{EA} = -0.164 \frac{p^2 L^3}{EA} \quad (2.89)$$



Zīmējums 2.17: Potenciālās enerģijas salīdzinājums

Redzam, ka tuvinātais risinājums ar Ritca metodi, ja aproksimācijai ņemta sinus funkcija, dod vistuvāko enerģijas vērtību precīzai. Tas ir tāpēc, ka sinus funkcijas pusvilnis ir ļoti tuvs kvadrātiskai parabolai, kas ir precīzais atrisinājums.

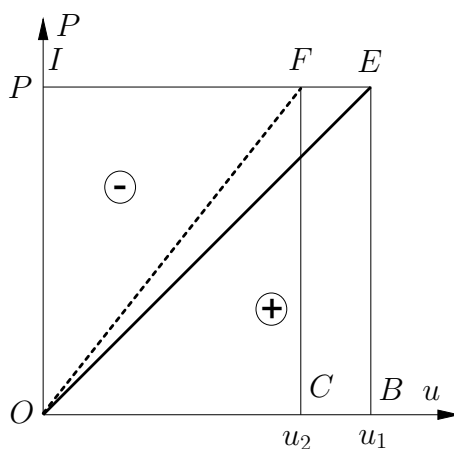
Visu atrisinājumu salīdzinājums ir dots Zīm. 2.17. Te dots arī risinājums GEM (8) pie smalkāka dalījuma ( $NE = 8$ ), kas ir pavisam tuvs precīzajam. Redzam, ka pie labi izvēlētas funkcijas arī Ritca metode dod labu rezultātu. GEM rezultāti konverģē uz precīzo vērtību, ja dalījums paliek smalkāks.



Zīmējums 2.18: Stienis ar koncentrētu spēku

Potenciālās enerģijas novērtējumu var izskaidrot, apskatot stieni, kas noslodzēts ar koncentrētu spēku (sk. Zīm. 2.18). Saskaņā ar Kastiljāno teorēmu [1] pārvietojums koncentrēta spēka virzienā ir saistīts ar konstrukcijas enerģiju.

Potenciālās enerģijas novērtējumu var aplūkot Zīm. 2.19. Te var



Zīmējums 2.19: Potenciālās enerģijas novērtējums

salīdzināt enerģijas precīzam atrisinājumam  $u_1$ , kur  $u_1$  ir pārvietojums spēka  $P$  virzienā, un tuvinātam atrisinājumam  $u_2$ . Enerģiju vērtības precīzam atrisinājumam ir

$$U = \frac{1}{2}Pu_1, \quad W = Pu_1, \quad \Pi = U - W = -\frac{1}{2}Pu_1$$

Deformācijas potenciālā enerģija  $U$  precīzam atrisinājumam atbilst laukumam  $OBE$ , bet tuvinātam – laukumam  $OCF$ . Pilno potenciālo enerģiju  $\Pi$  precīzam atrisinājumam  $u_1$  nosaka laukums  $OEI$  un tuvinātam atrisinājumam  $u_2$  laukums  $OFI$ . Mēs redzam, ka precīzā enerģijas vērtība ir mazāka par tuvināto, jo pilnā potenciālā enerģija ir negatīvs lielums.

Tāpat redzam, ka konstrukcijas stingums  $k = P/u_1$ , kas atbilst precīzajam atrisinājumam (līnija  $OE$ ), ir mazāks par stingumu  $k = P/u_2$ , kas atbilst tuvinātam atrisinājumam (līnija  $OF$ ).

# Nodaļa 3

## Sijas

### 3.1 Sijas potenciālā enerģija

Sijas ir viens no konstrukciju pamatelementiem. Zīm. 3.1 ir attēlota sija, kas liekta vertikālā plaknē. Šajā nodaļā aplūkosim sijas galīgā elementa izvedumu.

Sijas šķēlums un spriegumu  $\sigma$  un deformāciju  $\epsilon$  sadalījums sijā ir attēlots Zīm. 3.2. Pie mazām izliecēm siju teorijas sakarības ir [1]

$$\sigma = -\frac{M}{I}y, \quad \epsilon = \frac{\sigma}{E}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{M}{EI} \quad (3.1)$$

Šeit  $M$  ir lieces moments,  $I$  ir inerces moments un  $v$  ir pārvietojums (izliece).

Sijas galīgā elementa izvedumam ir nepieciešama potenciālās enerģijas (PE)  $\Pi$  izteiksme

$$\Pi = U - W \quad (3.2)$$

kur  $U$  ir deformācijas enerģija (DE) un  $W$  ir ārējo spēku darbs (ASD). Elementam  $dx$  DE ir  $dU$

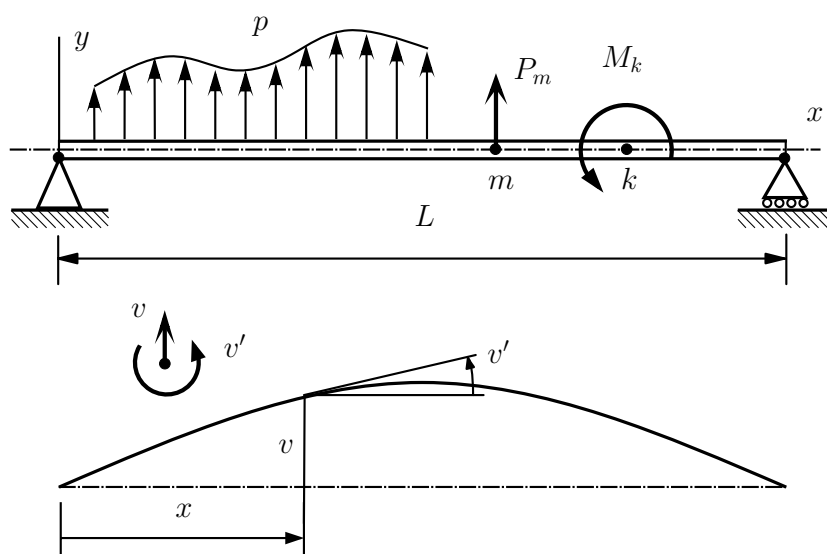
$$dU = \frac{1}{2} \int_A \sigma \epsilon dA dx = \frac{1}{2} \left( \frac{M^2}{EI} \int_A y^2 dA \right) dx \quad (3.3)$$

Izmantojot inerces momenta definīciju, iegūstam

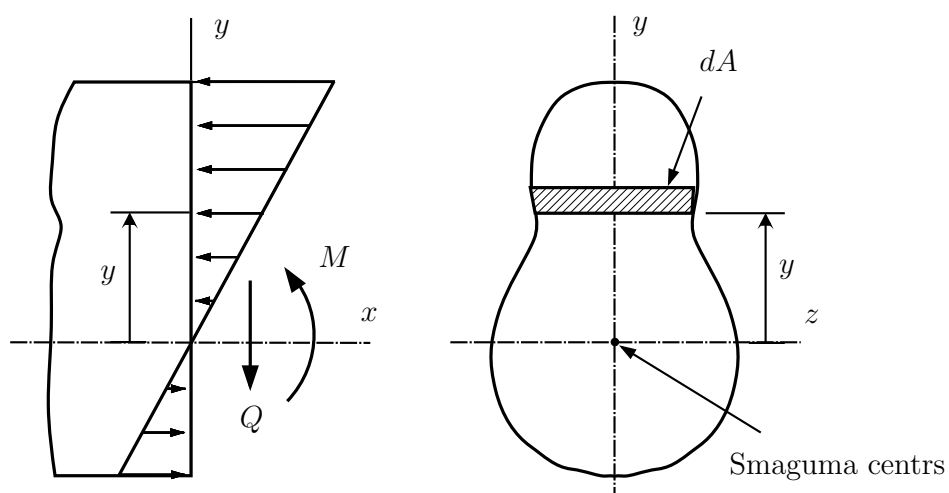
$$dU = \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} dx \quad (3.4)$$

Izmantojot (3.1), visai sijai iegūstam

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (3.5)$$



Zīmējums 3.1: Liekta sija



Zīmējums 3.2: Spriegumu sadalījums sijā

Ārējo spēku darba izteiksme saskaņā ar Zīm. 3.1 ir

$$W = \int_0^L p v dx + \sum_m P_m v_m + \sum_k M_k v'_k \quad (3.6)$$

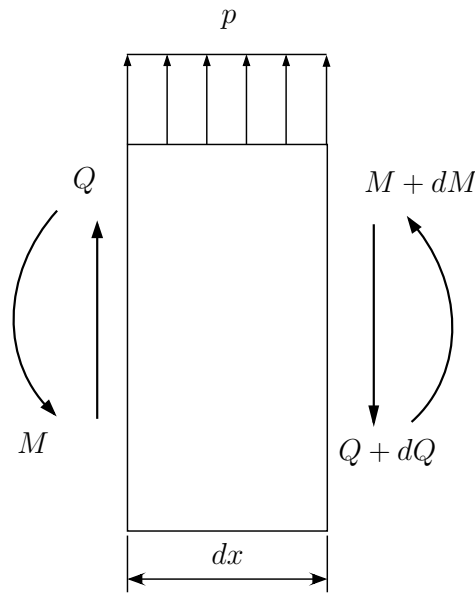
kur  $p$  ir izkļiedēta slodze,  $P_m$  ir koncentrēts spēks punktā  $m$ ,  $M_k$  ir lieces moments punktā  $k$ ,  $v_m$  ir izliece punktā  $m$  un  $v'_k$  ir pagrieziņa leņķis punktā  $k$ .

Tad sijas PE izteiksme ir

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx - \int_0^L p v dx - \sum_m P_m v_m - \sum_k M_k v'_k \quad (3.7)$$

No Zīm 3.3 iegūstam sakarības starp lieces momentu  $M$  un šķērsspēku  $Q$

$$\frac{dQ}{dx} = p, \quad \frac{dM}{dx} = Q \quad (3.8)$$



Zīmējums 3.3: Sijas elements  $dx$  ar iekšējiem un ārējiem spēkiem

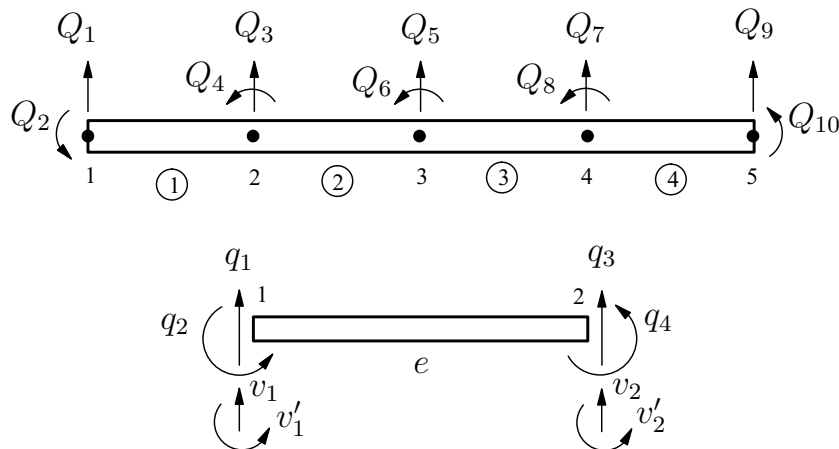
## 3.2 Sijas galīgais elements

Sija tiek sadalīta galīgos elementos (sk. Zīm. 3.4). Katrā mezglu punktā ir divas brīvības pakāpes (DOF) - viena ir izliece, otra ir pagrieziena leņķis jeb rotācija. GEM tos abus kopā sauc par pārvietojumiem. Tipiskās mezgla  $i$  brīvības pakāpes (DOF) ir  $Q_{2i-1}$  un  $Q_{2i}$ . Visas sijas pārvietojumu vektors ir

$$\mathbf{Q} = [Q_1, Q_2, \dots, Q_{10}] \quad (3.9)$$

Viena sijas elementa lokālās DOF ir

$$\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3, q_4] = [v_1, v'_1, v_2, v'_2] \quad (3.10)$$



Zīmējums 3.4: Sijas sadalīšana galīgos elementos

Tabula 3.1: Sijas galīgo elementu savienojumu matrica

Elements	Mezgli		Numerācija
$e$	1	2	Lokālie numuri
1	1	2	Globālie numuri
2	2	3	Globālie numuri
3	3	4	Globālie numuri
4	4	5	Globālie numuri

Visas sijas galīgo elementu savienojumu matrica ir attēlota Tabulā 3.2. Šo matricu izveido tāpat kā matricu stienim (sk. Tabulu 2.6).

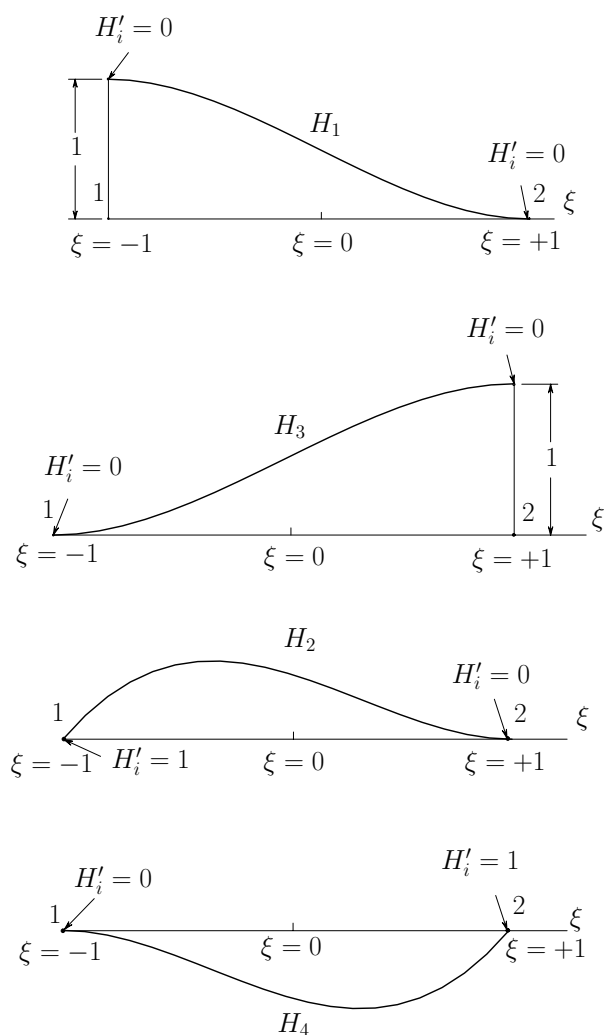
Elementa formas funkcijas, lai aproksimētu izlieci  $v$  un nodrošinātu pārvietojumu nepārtrauktību, izvēlas Ermita polinomu veidā (sk. Zīm. 3.5). Tāpat kā iepriekš aproksimācijai lieto elementa lokālo koordinātu sistēmu  $[-1 \leq \xi \leq +1]$  (sk. Zīm. 2.7).

Sijas elementa formas funkcija atšķiras to stienņa elementa formas funkcijas. Tas ir tāpēc, ka sijas GE mezglu pārvietojumi ir izliece un tās atvasinājums (pagrieziena leņķis). Tieši Ermita formas funkcijas nodrošina gan izlieces, gan pagrieziena leņķa nepārtrauktību starp elementiem. Formas funkcija ir kubiskais polinoms

$$H_i = a_i + b_i \xi + c_i \xi^2 + d_i \xi^3, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (3.11)$$

Lai nodrošinātu galveno robežnoteikumu izpildi GE savienojumu vietās - mezglu punktos, formas funkcijām ir jānodrošina noteikumi, kas parādīti Tabulā 3.2.





Zīmējums 3.5: Elementa formas funkcijas - Ermita polinomi

Koeficientus  $a_i, b_i, c_i$  un  $d_i$  izteiksmē (3.11) viegli noteikt izmantojot Tabulā 3.2 dotās formas funkciju īpašības. Tādējādi

$$\begin{aligned}
 H_1 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)^2(2 + \xi), & H_2 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)^2(\xi + 1), \\
 H_3 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)^2(2 - \xi), & H_4 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)^2(\xi - 1)
 \end{aligned}
 \tag{3.12}$$

Tātad Ermita funkcijas (3.12) ir attēlotas Zīm. 3.5. Šīs funkcijas nodrošina pārvietojumu nepārtrauktību starp elementiem un tās tiek izmantotas pārvietojumu aproksimācijai elementā. Lokālās koordinātēs aproksimācija

Tabula 3.2: Sijas formas funkciju īpašības

Koordināte	$H_1$	$H'_1$	$H_2$	$H'_2$	$H_3$	$H'_3$	$H_4$	$H'_4$
$\xi = -1$	1	0	0	1	0	0	0	0
$\xi = +1$	0	0	0	0	1	0	0	1

ir šāda

$$v(\xi) = H_1 v_1 + H_2 \left( \frac{\partial v}{\partial \xi} \right)_1 + H_3 v_2 + H_4 \left( \frac{\partial v}{\partial \xi} \right)_2 \quad (3.13)$$

Transformācija starp lokālām  $\xi$  un globālām  $x$  koordinātēm ir

$$x = \frac{1 - \xi}{2} x_1 + \frac{1 + \xi}{2} x_2 = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_2 - x_1}{2} \xi \quad (3.14)$$

Tā kā elementa garums  $l = x_2 - x_1$ , tad

$$dx = \frac{l}{2} d\xi \quad (3.15)$$

un

$$\frac{dv}{d\xi} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{d\xi} = \frac{l}{2} \frac{dv}{dx} \quad (3.16)$$

Ievērojot formulu (3.10), iegūstam

$$v(\xi) = H_1 q_1 + \frac{l}{2} H_2 q_2 + H_3 q_3 + \frac{l}{2} H_4 q_4 \quad (3.17)$$

jeb matricu pierakstā

$$v = \mathbf{H} \mathbf{q} \quad (3.18)$$

kur

$$\mathbf{H} = \left[ H_1, \frac{l}{2} H_2, H_3, \frac{l}{2} H_4 \right] \quad (3.19)$$

Elementa DE ir

$$U = \frac{1}{2} EI \int_e \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (3.20)$$

No formulas (3.16) iegūstam

$$\frac{dv}{dx} = \frac{2}{l} \frac{dv}{d\xi}, \quad \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{4}{l^2} \frac{d^2 v}{d\xi^2} \quad (3.21)$$

### 3.3. ĀRĒJO SPĒKU DARBS UN SIJAS PILNĀ POTENCIĀLĀ ENERĢIJA 51

Ieliekot šajā formulā izteiksmi (3.18) un paceļot kvadrātā, iegūstam

$$\left(\frac{d^2 v}{dx^2}\right)^2 = \mathbf{q}^T \frac{16}{l^4} \left(\frac{d^2 \mathbf{H}}{d\xi^2}\right)^T \left(\frac{d^2 \mathbf{H}}{d\xi^2}\right) \mathbf{q} \quad (3.22)$$

$$\left(\frac{d^2 \mathbf{H}}{d\xi^2}\right) = \left[ \frac{3}{2}\xi, \frac{-1 + 3\xi l}{2}, -\frac{3}{2}\xi, \frac{1 + 3\xi l}{2} \right] \quad (3.23)$$

Ievietojot šo izteiksmi un sakarību (3.15) formulā (3.20), iegūstam DE izteiksmi diskrētā formā

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K}_e \mathbf{q} \quad (3.24)$$

kur  $\mathbf{K}_e$  ir sijas galīgā elementa stinguma matrica

$$\mathbf{K}_e = \frac{8EI}{l^3} \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} \frac{9}{4}\xi^2 & \frac{3}{8}\xi(-1 + 3\xi)l & -\frac{9}{4}\xi^2 & \frac{3}{8}\xi(1 + 3\xi)l \\ \frac{1}{16}(-1 + 3\xi)^2 l^2 & \text{Sym} & -\frac{3}{8}\xi(-1 + 3\xi)l & \frac{1}{16}(-1 + 3\xi^2)l^2 \\ \frac{9}{4}\xi^2 & & & -\frac{3}{8}(1 + 3\xi)l \\ \frac{1}{16}(1 + 3\xi)^2 l^2 & & & \end{bmatrix} d\xi$$

Katru šīs matricas locekli ir jāintegrē, ievērojot ka

$$\int_{-1}^{+1} \xi^2 d\xi = \frac{2}{3}, \quad \int_{-1}^{+1} \xi d\xi = 0, \quad \int_{-1}^{+1} d\xi = 2 \quad (3.25)$$

Pēc integrēšanas iegūstam elementa stinguma matricu

$$\mathbf{K}_e = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Redzam, ka stinguma matrica ir simetriska.

### 3.3 Ārējo spēku darbs un sijas pilnā potenciālā enerģija

Noteiksim ASD  $W$  funkcionāļa (3.7) diskrēto formu vienmērīgi izkliedētas slodzes  $p$  gadījumā

$$W = \int_l p v dx = \left( \frac{pl}{2} \int_{-1}^{+1} \mathbf{H} d\xi \right) \mathbf{q} \quad (3.27)$$

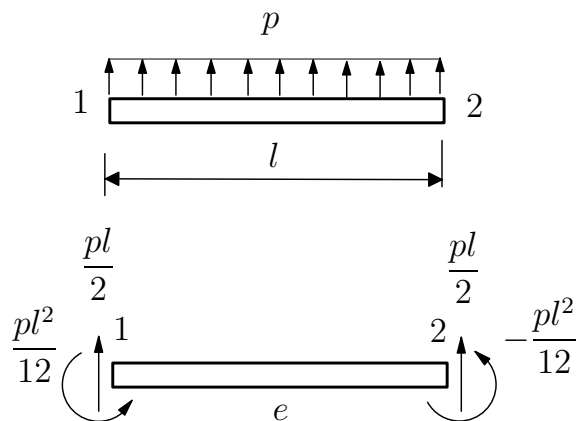
Ievērojot formulas (3.12) un (2.37), iegūstam

$$W = \int_l p v dx = \mathbf{F}_e^T \mathbf{q} \quad (3.28)$$

kur  $\mathbf{F}_e$  ir elementa mezglu spēki

$$\mathbf{F}_e = \left[ \frac{pl}{2}, \frac{pl^2}{12}, \frac{pl}{2}, \frac{pl^2}{12} \right] \quad (3.29)$$

Elementa mezglu spēki ir parādīti Zīm. 3.6. Redzam, ka izkļiedētā slodze ir novesta uz mezglu spēkiem  $pl/2$  un momentiem mezglos  $pl^2/12$ , kas pēc pastrādātā darba ir ekvivalenti izkļiedētās slodzes pastrādātam darbam. Tāpēc tos sauc par enerģētiski ekvivalentiem mezglu spēkiem. Koncentrētos spēkus  $P_m$  un momentus  $M_k$  pieskaita šiem mezglu spēkiem.



Zīmējums 3.6: Izkļiedētā slodze uz elementu

Visas konstrukcijas potenciālo enerģiju iegūstam, summējot elementu enerģijas. To izdara tāpat kā viendimensiju stienim, kas tika aplūkots 2. nodaļā

$$\mathbf{\Pi} = \frac{1}{2} \mathbf{Q}^T \mathbf{K} \mathbf{Q} - \mathbf{Q}^T \mathbf{F} \quad (3.30)$$

Šeit  $\mathbf{K}$  ir visas sijas stinguma matrica,  $\mathbf{Q}$  ir visas sijas mezglu pārvietojumu vektors un  $\mathbf{F}$  ir visu mezglu spēku vektors.

No PE (3.30) minimuma noteikuma iegūstam vienādojumu sistēmu

$$\mathbf{K} \mathbf{Q} = \mathbf{F} \quad (3.31)$$

Ievērtējot robežnoteikumus, to atrisina

$$\mathbf{Q} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F} \quad (3.32)$$

No mezglu pārvietojumiem  $\mathbf{Q}$  var izskaitļot spriegumus.

### 3.4 Spriegumu aprēķins sijā

Izmantojam sakarības starp lieces momentu, šķērsspēku un izlieci

$$M = EI \frac{d^2 v}{dx^2}, \quad Q = \frac{dM}{dx}, \quad v = \mathbf{H} \mathbf{q} \quad (3.33)$$

No šejienes iegūstam lieces momentu  $M$  un šķērsspēku  $Q$  elementā

$$M = \frac{EI}{l^2} [6\xi q_1 + (3\xi - 1)lq_2 - 6\xi q_3 + (3\xi + 1)lq_4] \quad (3.34)$$

$$Q = \frac{6EI}{l^3} (2q_1 + lq_2 - 2q_3 + lq_4) \quad (3.35)$$

Redzam, ka  $M$  ir lineāra funkcija (elementa robežās), bet  $Q$  ir konstants. Spriegumus parasti nosaka elementa centrā ( $\xi = 0$ ).

### 3.5 Sijas aprēķina piemēri

Uzdevums ir sijai, kas attēlota Zīm. 3.7, noteikt pagrieziena leņķus punktos 2 un 3 un izlieci otrā laiduma vidū.

Siju sadalām 2 elementos, izveidojot 3 mezglu punktus. Sijas pārvietojumu vektors ir

$$\mathbf{Q}^T = [Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6]$$

Robežnoteikumi ir

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_5 = 0$$

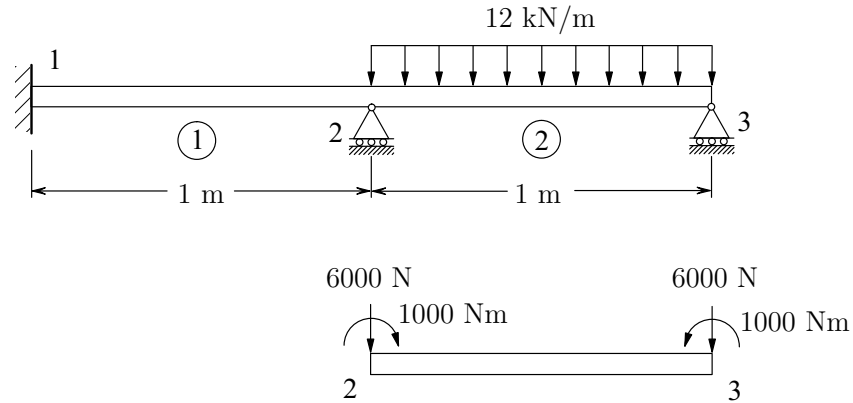
Uzdevumam ir 2 nezināmie  $Q_4$  (pagrieziena leņķis vidējā balstā - mezgls 2) un  $Q_6$  (pagrieziena leņķis labajā balstā - mezgls 3). Dotie lielumi ir

$$E = 200 \text{ GPa}, \quad I = 4 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

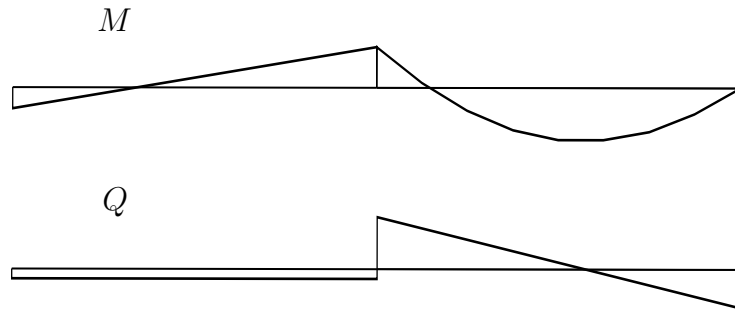
Elementu matricas izskaitļo, izmantojot formulu (3.26)

$$\frac{EI}{l^3} = \frac{(200 \times 10^9)(4 \times 10^{-6})}{1^3} = 8 \times 10^5 \text{ N/m}$$

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_2 = 8 \times 10^5 \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$



Zīmējums 3.7: Divlaidumu sija un otrā elementa mezglu spēki



Zīmējums 3.8: Lieces momentu un šķērsspēku epīras

Abos elementos lokālie  $q$  un globālie pārvietojumi ir saistīti šādi

$$e = 1 \quad Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \quad Q_4, \quad e = 2 \quad Q_3 \quad Q_4 \quad Q_5 \quad Q_6$$

Mezglu spēkus elementā sarēķina pēc formulas (3.29) un tie ir attēloti Zīm. 3.7. Tātad globālie mezglu spēki, kas var pastrādāt darbu, ir

$$F_4 = -1000 \text{ Nm}, \quad F_6 = 1000 \text{ Nm}$$

Tāpat kā aprakstīts 2. nodaļā iegūstam globālo (visas sijas) stinguma matricu. Ievērtējot robežnoteikumus, tā ir šāda

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{44}^{(1)} + K_{22}^{(2)} & K_{24}^{(2)} \\ K_{42}^{(2)} & K_{44}^{(2)} \end{bmatrix} = 8 \times 10^5 \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Tas nozīmē, ka vienādojumu sistēma (3.31) mūsu piemērā ir

$$8 \times 10^5 \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_4 \\ Q_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1000 \\ +1000 \end{Bmatrix} \quad (3.38)$$

To atrisinot, iegūstam

$$\begin{Bmatrix} Q_4 \\ Q_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2.679 \times 10^{-4} \\ 4.464 \times 10^{-4} \end{Bmatrix} \quad (3.39)$$

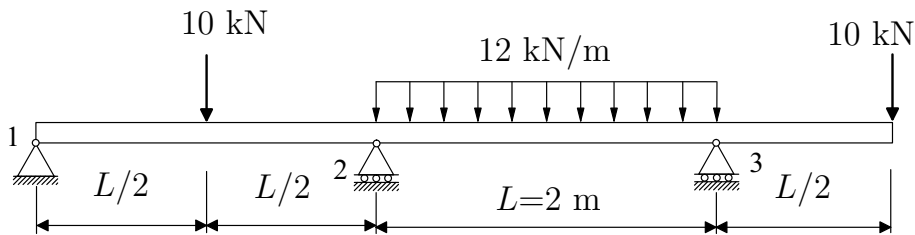
Elementam 2

$$q_1 = 0, \quad q_2 = Q_4, \quad q_3 = 0, \quad q_4 = Q_6$$

Lai iegūtu izlieci otrā laiduma vidū, izmanto formulu (3.18) pie  $\xi = 0$

$$v = \mathbf{H}\mathbf{q} = 0 + \frac{l}{2}H_2Q_4 + 0 + \frac{l}{2}H_4Q_6 = -0.0893\text{mm}$$

Tas ir rezultāts ar GEM, kas iegūts sadalot siju tikai divos elementos. Protams, daudz maz precīzas  $M$  un  $Q$  vērtības nevar iegūt ar dalījumu divos elementos. Tāpēc šis piemērs ir aprēķināts ar programmu LIRA. Prezīzais rezultāts ir  $v=0.129$  mm, kas iegūts sadalot siju  $NE = 40$  elementos. Atbilstošās  $M$  un  $Q$  epīras parādītas Zīm. 3.8.



Zīmējums 3.9: Daudzlaidumu sija ar konsoli

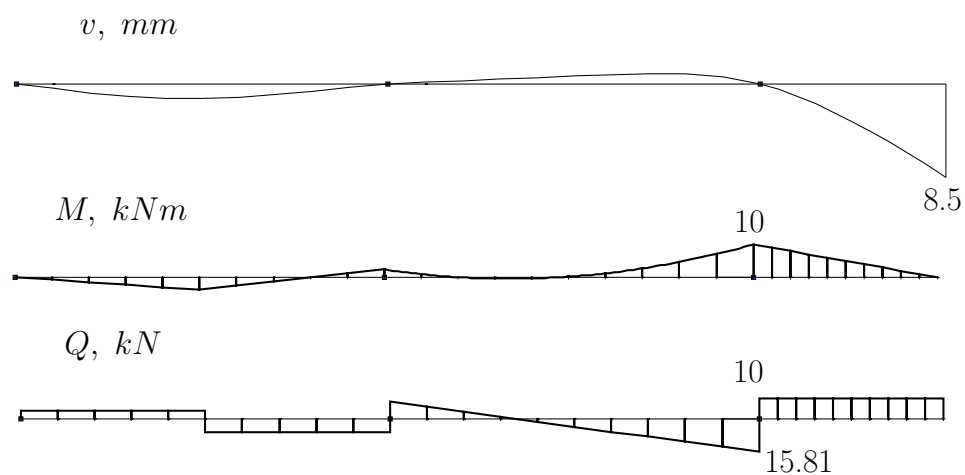
Tālāk aplūkosim daudzlaidumu sijas, kas attēlota Zīm. 3.9, aprēķinu. Sija ir izgatavota no tērauda. Dotie materiāla parametri un sijas ģeometriskie lielumi ir

$$E = 200 \text{ GPa}, \quad I = 4 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Slodzes un sijas laidumu izmēri parādīti zīmējumā.

Sija tika reķināta ar GEM programmu LIRA. Sijas izlieces, lieces momentu un šķērsspēku epīras parādītas Zīm. 3.10. Pēc maksimālā lieces momenta var noteikt spriegumus  $\sigma$ , izmantojot spriegumu aprēķinu formulu (3.1). Pēc maksimālā šķērsspēka var noteikt tangenciālos spriegumus  $\tau$ , izmantojot Žuravska formulu [1]. Tāpat pēc maksimālās izlieces var noteikt vai izliece ir pieļaujamās robežās.

Redzam, ka ar programmu LIRA var ērti sarēķināt gan izlieces, gan lieces momentus un arī šķērsspēkus daudzlaidumu sijas.



Zīmējums 3.10: Izlieču, lieces momentu un šķērsspēku epīras

Kaut gan daudzlaidumu siju aprēķiniem var lietot arī citas metodes, tomēr galīgo elementu metode ir visuniversālākā un visērtākā lietošanai. It īpaši galīgo elementu metodes priekšrocības parādās gan dinamikas, gan noturības aprēķinos, kas tiks aplūkoti turpmāk.



# Nodaļa 4

## Divdimensiju problēmas

### 4.1 Ievads

Aplūkosim elastības teorijas plakano uzdevumu (sk. Zīm. 4.1). Pārvietojumi šajā gadījumā ir divi

$$\mathbf{u} = [u, v]^T \quad (4.1)$$

kur  $u$  un  $v$  ir pārvietojumi  $x$  un  $y$  asu virzienā. Spriegumi un deformācijas ir

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}] \quad (4.2)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = [\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}] \quad (4.3)$$

Tilpuma spēki  $\mathbf{f}$  un virsmas spēki  $\mathbf{T}$  un tilpuma elements  $dV$  ir

$$\mathbf{f}^T = [f_x, f_y], \quad \mathbf{T}^T = [T_x, T_y], \quad dV = tdA \quad (4.4)$$

kur  $t$  ir biezums  $z$  virzienā.

Kinemātiskās sakarības ir

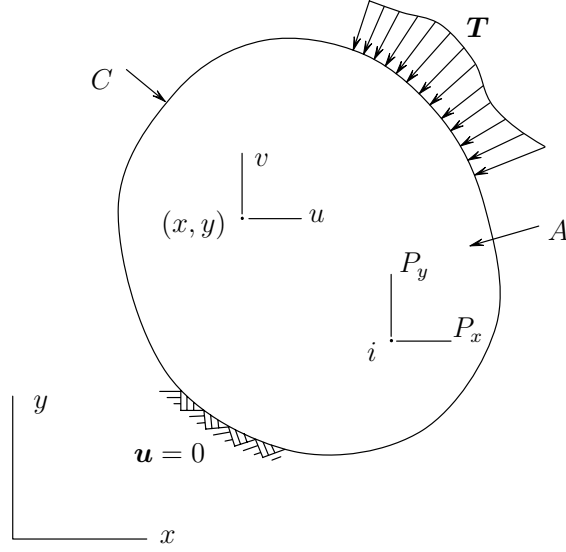
$$\boldsymbol{\epsilon}^T = \left[ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \quad (4.5)$$

Spriegumus un deformācijas saista Huka likums

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon} \quad (4.6)$$

kur plakanā spriegumstāvokļa gadījumā

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{array} \right\} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \begin{array}{ccc} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} \quad (4.7)$$



Zīmējums 4.1: Plakanais elastības teorijas uzdevums

un plakanā deformāciju stāvokļa gadījumā

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

Anizotropos materiālus (kompozītus) var rēķināt, lietojot atbilstošu  $\mathbf{D}$  matricu.

## 4.2 Modelēšana ar galīgiem elementiem

Divdimensiju apgabalu var sadalīt tīsstūros (sk. Zīm. 4.2). Katrām trīsstūrim ir trīs mezgli stūros. Ar šādiem elementiem var piepildīt visu apgabalu, izņemot liklīniju robežu, kuru ar taisnēm var aproksimēt aptuveni.

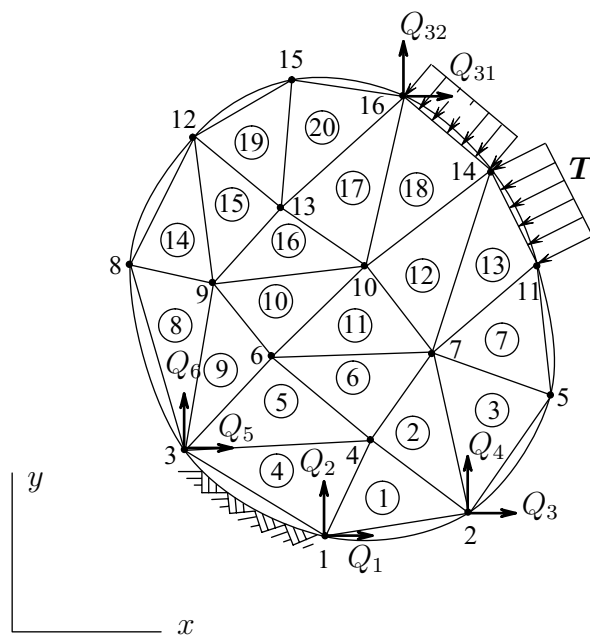
Plakanā uzdevumā katram mezgla ir divas brīvības pakāpes (DOF). Globālais pārvietojumu vektors ir

$$\mathbf{Q}^T = [Q_1, Q_2, \dots, Q_N] \quad (4.9)$$

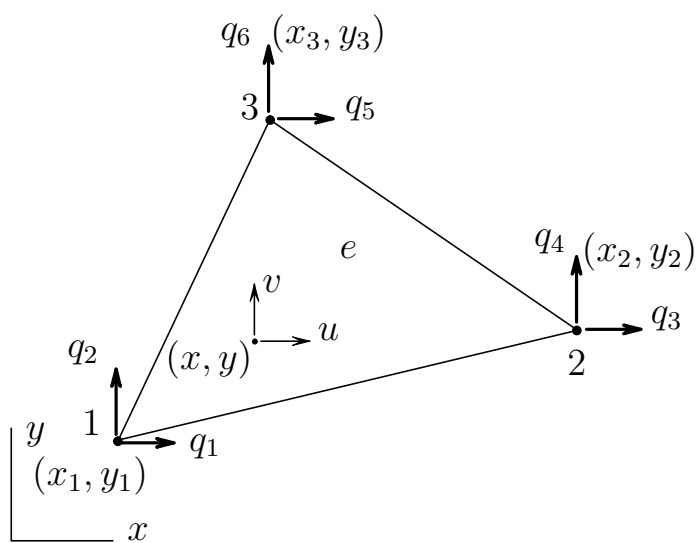
kur  $N$  ir DOF kopskaits.

Tipiskais tīsstūra galīgais elements ir attēlots Zīm. 4.3. Šim elementam ir 6 DOF

$$\mathbf{q}^T = [q_1, q_2, \dots, q_6] \quad (4.10)$$



Zīmējums 4.2: Plakana apbubala diskretizācija



Zīmējums 4.3: Tīsstūra galīgais elements

Vēl ir jādefinē galīgo elementu montāžas matrica. Tabulā 5.3 ir attēlota montāžas matrica Zīm. 4.2 attēlotajam apbubalam.

Tabula 4.1: Elementu montāžas matrica

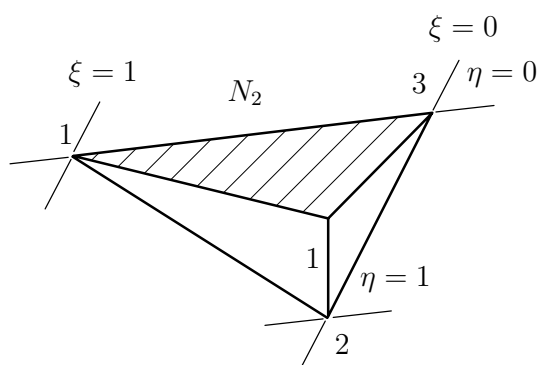
Elementa numurs $e$	1	2	3
1	1	2	4
2	4	2	7
...			
...			
...			
11	6	7	10
...			
...			
...			
20	13	16	15

### 4.3 Trīsstūra galīgais elements

Elementam, kas attēlots Zīm. 4.3, var uzrakstīt pārvietojumu aproksimācijas, izmantojot elementa formas funkcijas  $N_1, N_2$  un  $N_3$

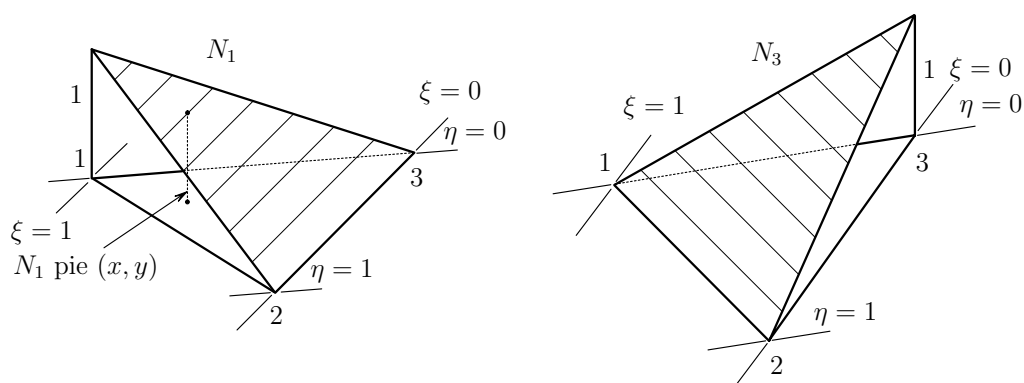
$$N_1 = \xi, \quad N_2 = \eta, \quad N_3 = 1 - \xi - \eta \quad (4.11)$$

kur  $\xi, \eta$  ir tā saucamās trīsstūra koordinātes, kas parādītas Zīm. 4.4.

Zīmējums 4.4: Trīsstūra koordinātes un formas funkcija  $N_2$ 

Formas funkcijas  $N_1$  un  $N_3$  ir parādītas Zīm. 4.5.

Trīsstūra koordinātes sauc arī par laukuma koordinātēm. To fizikālā jēga ir parādīta Zīm. 4.6. Punkts  $(x, y)$  sadala trīsstūri trijos laukumos  $A_1, A_2$

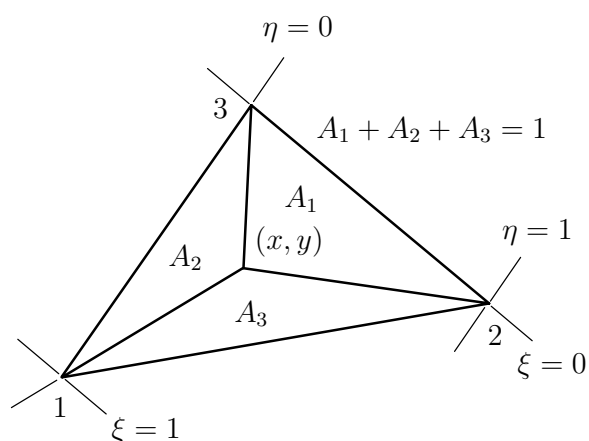
Zīmējums 4.5: Elementa formas funkcijas  $N_1$  un  $N_3$ 

un  $A_3$ . Formas funkcijas var izteikt caur šiem laukumiem

$$N_1 = \xi = \frac{A_1}{A}, \quad N_2 = \eta = \frac{A_2}{A}, \quad N_3 = 1 - \xi - \eta \frac{A_3}{A} \quad (4.12)$$

Ir acīmredzami, ka

$$N_1 + N_2 + N_3 = 1 \quad (4.13)$$



Zīmējums 4.6: Laukuma koordinātes

### 4.3.1 Mainīgo izoparametriskā reprezentācija

Pārvietojumus var aproksimēt, izmantojot trīsstūra elementa formas funkcijas

$$\begin{aligned} u &= N_1 q_1 + N_2 q_3 + N_3 q_5 \\ v &= N_1 q_2 + N_2 q_4 + N_3 q_6 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Vai, izmantojot formulu (4.11), aproksimāciju var izteikt caur trīsstūra koordinātēm

$$\begin{aligned} u &= (q_1 - q_5)\xi + (q_3 - q_5)\eta + q_5 \\ v &= (q_2 - q_6)\xi + (q_4 - q_6)\eta + q_6 \end{aligned} \quad (4.15)$$

Sakarības (4.14) var uzrakstīt matricu formā

$$\mathbf{u} = \mathbf{Nq} \quad (4.16)$$

kur

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Trīsstūra elementam mēs varam uzrakstīt tādu pašu kā formula (4.14) sakarību starp koordinātēm  $x, y$  un  $\xi, \eta$

$$\begin{aligned} x &= N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 \\ y &= N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 \end{aligned} \quad (4.18)$$

vai

$$\begin{aligned} x &= (x_1 - x_3)\xi + (x_2 - x_3)\eta + x_3 \\ y &= (y_1 - y_3)\xi + (y_2 - y_3)\eta + y_3 \end{aligned} \quad (4.19)$$

kur  $x_i, y_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) ir mezglu punktu koordinātes. Šo sakarību var uzrakstīt saīsinātā formā

$$\begin{aligned} x &= x_{13}\xi + x_{23}\eta + x_3 \\ y &= y_{13}\xi + y_{23}\eta + y_3 \end{aligned} \quad (4.20)$$

Augstāk aprakstīto pieeju, kad pārvietojumus un koordinātes aproksimē ar vienām un tām pašām funkcijām, sauc par izoparametrisko GEM formulējumu. To plaši izmanto GEM, sevišķi čaulu galīgo elementu sakarību izvedumos, kad ir jāapraksta liektas virsmas vai līklīniju robežas.

Lai iegūtu kinemātiskās sakarības (4.5) lokālās koordinātēs, ir jāievēro, ka

$$u = [x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)], \quad v = [x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)]$$

tad

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \xi} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (4.21)$$

To var uzrakstīt matricu formā

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

kur  $\mathbf{J}$  ir koordinātu transformācijas matrica, ko sauc par Jakobi matricu

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Ievērojot (4.20), Jakobi matricu var uzrakstīt

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} x_{13} & y_{13} \\ x_{23} & y_{23} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Uzrakstam formulas (4.22) inverso formu

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial x}{\partial y} \end{pmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

kur  $\mathbf{J}^{-1}$  ir

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} y_{23} & -y_{13} \\ -x_{23} & x_{13} \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

kur

$$\det \mathbf{J} = x_{13}y_{23} - x_{23}y_{13} \quad (4.27)$$

No šīs formulas redzams, ka

$$|\det \mathbf{J}| = 2A \quad (4.28)$$

Jāievēro, ka punktus 1, 2 un 3 ir jāskaita pretēji pulksteņa rādītāja virzienam, tad determinants ir pozitīvs.

No formulām (4.25) un (4.26) seko, ka

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{pmatrix} y_{23} \frac{\partial u}{\partial \xi} - y_{13} \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ -x_{23} \frac{\partial u}{\partial \xi} + x_{13} \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

Priekš pārvietojuma  $v$  formula ir līdzīga

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{pmatrix} y_{23} \frac{\partial v}{\partial \xi} - y_{13} \frac{\partial v}{\partial \eta} \\ -x_{23} \frac{\partial v}{\partial \xi} + x_{13} \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

Izmantojot formulas (4.5), (4.15), (4.29) un (4.30), iegūstam

$$\begin{aligned} \epsilon &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{pmatrix} y_{23}(q_1 - q_5) - y_{13}(q_3 - q_5) \\ -x_{23}(q_2 - q_6) + x_{13}(q_4 - q_6) \\ -x_{23}(q_1 - q_5) + x_{13}(q_3 - q_5) + y_{23}(q_2 - q_6) - y_{13}(q_4 - q_6) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Izmantojot  $x_{ij}$  un  $y_{ij}$  definīcijas, iegūstam

$$y_{31} = -y_{13}, \quad y_{12} = y_{13} - y_{23}, \quad \text{utt.}$$

Tad formulu priekš  $\epsilon$  var uzrakstīt

$$\epsilon = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{pmatrix} y_{23}q_1 + y_{31}q_3 + y_{12}q_5 \\ x_{32}q_2 + x_{13}q_4 + x_{21}q_6 \\ x_{32}q_1 + y_{23}q_2 + x_{13}q_3 + y_{31}q_4 + x_{21}q_5 + y_{12}q_6 \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

Šo formulu var pierakstīt matricu formā

$$\epsilon = \mathbf{Bq} \quad (4.32)$$



kur matrica  $\mathbf{B}$  ir

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Tātad matrica  $\mathbf{B}$  satur konstantes, kuras var izteikt ar elementa mezglu koordinātēm.

### 4.3.2 Potenciālā enerģija

Potenciālā enerģija plakanam ķermenim, kura biezums ir  $t$ , var uzrakstīt

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_A \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon} t dA - \int_A \mathbf{u}^T \mathbf{f} t dA - \int_C \mathbf{u}^T \mathbf{T} t dc - \sum_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{P}_i \quad (4.34)$$

Pēdējais loceklis ir koncentrēta spēka  $\mathbf{P}_i$  pastrādātais darbs un  $\mathbf{P}^T = [P_x, P_y]$ . Priekšpēdējais loceklis ir pa kontūrlīniju izkliedēta slodze, bet pirms tam ir loceklis, kas nosaka tilpuma spēku darbu.

Apgabala, kas attēlots Zīm. 4.2, potenciālās enerģijas diskrētā forma ir

$$\Pi = \sum_e \frac{1}{2} \int_e \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon} t dA - \sum_e \int_e \mathbf{u}^T \mathbf{f} t dA - \int_C \mathbf{u}^T \mathbf{T} t dc - \sum_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{P}_i \quad (4.35)$$

jeb

$$\Pi = \sum_e U_e - \sum_e \int_e \mathbf{u}^T \mathbf{f} t dA - \int_C \mathbf{u}^T \mathbf{T} t dc - \sum_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{P}_i \quad (4.36)$$

kur elementa deformācijas enerģija  $U_e$  ir

$$U_e = \frac{1}{2} \int_e \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon} t dA \quad (4.37)$$

### 4.3.3 Elementa un globālā stinguma matrica

Izmantojot formulu (4.32) izteiksmē (4.37), iegūstam

$$U_e = \frac{1}{2} \int_e \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon} t dA = \frac{1}{2} \int_e \mathbf{q}^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{q} t dA \quad (4.38)$$

Pieņemot, ka  $t = \text{const}$ , un tā kā visi elementi matricās  $\mathbf{D}$  un  $\mathbf{B}$  ir konstantes, mēs varam uzrakstīt

$$U_e = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{q} t \left( \int_e dA \right) \quad (4.39)$$

Tā kā  $\int_e dA = A_e$ , kur  $A_e$  ir elementa laukums, tad

$$U_e = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{q} t A_e \quad (4.40)$$

jeb

$$U_e = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K}_e \mathbf{q} \quad (4.41)$$

kur  $\mathbf{K}_e$  ir elementa stinguma matrica

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{q} t A_e \quad (4.42)$$

Tā kā matrica  $\mathbf{D}$  ir simetriska, arī elementa stinguma matrica  $\mathbf{K}_e$  ir simetriska. Visu elementu montāžu apgabalā veic saskaņā ar Zīm. 4.2 un Tabulu 4.2. Tādā veidā mēs nosakām visa apgabala deformācijas potenciālo enerģiju  $U$  un globālo stinguma matricu  $\mathbf{K}$

$$U = \sum_e \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K}_e \mathbf{q} = \frac{1}{2} \mathbf{Q}^T \mathbf{K} \mathbf{Q} \quad (4.43)$$

kur

$$\mathbf{K} = \sum_e \mathbf{K}_e \quad (4.44)$$

Globālā stinguma matrica ir lentveida un retināta matrica.

#### 4.3.4 Elementa mezglu spēki

Vispirms nosakām tilpuma spēkus, kas ietilpst funkcionālī (4.34)

$$\int_e \mathbf{u}^T \mathbf{f} t dA = t \int_e (u f_x + v f_y) dA \quad (4.45)$$

Izmantojot aproksimācijas (4.14), iegūstam

$$\begin{aligned} \int_e \mathbf{u}^T \mathbf{f} t dA &= q_1 \left( t f_x \int_e N_1 dA \right) + q_2 \left( t f_y \int_e N_1 dA \right) \\ &+ q_3 \left( t f_x \int_e N_2 dA \right) + q_4 \left( t f_y \int_e N_2 dA \right) \\ &+ q_5 \left( t f_x \int_e N_3 dA \right) + q_6 \left( t f_y \int_e N_3 dA \right) \end{aligned} \quad (4.46)$$

Izmantojot elementa formas funkciju definīciju, kas parādīta Zīm. 4.7, redzams, ka  $\int_e N_1 dA$  ir piramīdas tilpums. Tās pamats ir  $A_e$  un augstums ir

1 (bezdimensiju lielums). Tātad piramīdas tilpums jebkurai formas funkcijai  $N_i$  ir

$$\int_e N_i dA = \frac{1}{3} A_e$$

Tāpēc formulu (4.46) var uzrakstīt

$$\int_e = \mathbf{u}^T \mathbf{f} t dA = \mathbf{q}^T \mathbf{F}_e \quad (4.47)$$

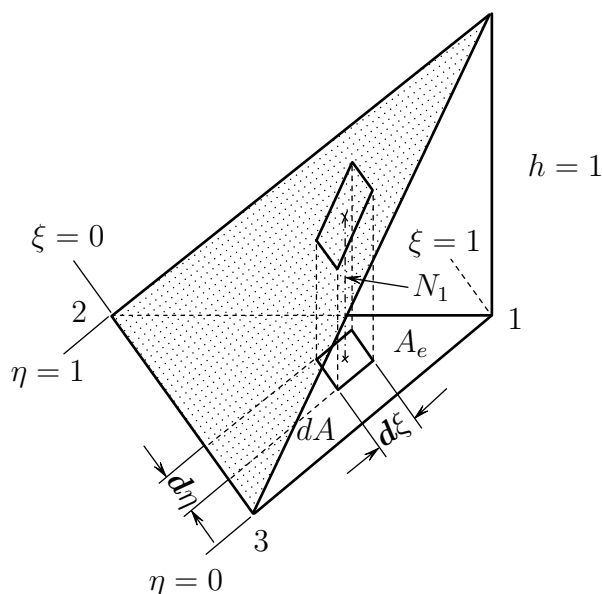
kur  $\mathbf{F}_e$  ir elementa tilpuma spēku, kas reducēti uz mezglu punktiem, vektors

$$\mathbf{F}_e^T = \frac{tA_e}{3} [f_x, f_y, f_x, f_y, f_x, f_y] \quad (4.48)$$

Šie mezglu spēki tiek piesummēti globālam slodzes vektoram  $\mathbf{F}$ , izmantojot elementu savienojumu matricu, kas attēlota tabulā 4.2

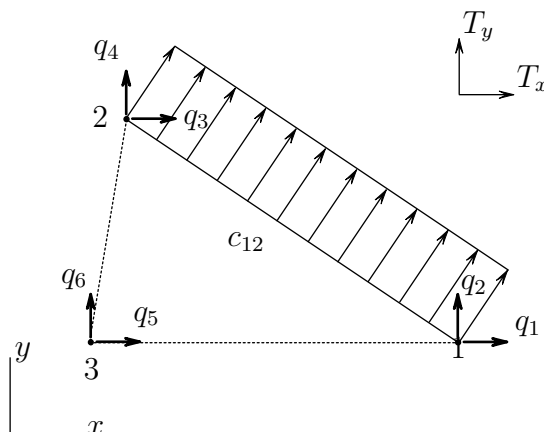
$$\mathbf{F} = \sum_e \mathbf{F}_e$$

Spēku summēšanas procedūra ir līdzīga kā stienim un sijai.



Zīmējums 4.7: Integrālis no elementa formas funkcijas

Virsmas spēki  $\mathbf{T}$  ir izkļiedēta slodze uz apgabala kontūru. Šādi spēki darbojas uz elementa malas, kas savieno mezglus uz kontūra (sk. Zīm. 4.8). Šie spēki arī dod papildinājumu globālam mezglu spēku vektoram  $\mathbf{F}$ .



Zīmējums 4.8: Virsmas spēki

Apskatīsim gadījumu, kad uz malu  $c_{12}$  darbojas virsmas spēki  $T_x, T_y$ . Tad

$$\int_C \mathbf{u}^T \mathbf{T} t dc = \int_{c_{12}} (u T_x + v T_y) t dc \quad (4.49)$$

Izmantojot formulu (4.16), iegūstam

$$\begin{aligned} \int_{c_{12}} \mathbf{u}^T \mathbf{T} t dc &= q_1 \left( t T_x \int N_1 dc \right) + q_2 \left( t T_y \int N_1 dc \right) \\ &+ q_3 \left( t T_x \int N_2 dc \right) + q_4 \left( t T_y \int N_2 dc \right) \end{aligned} \quad (4.50)$$

Ir jāatzīmē, ka  $N_3 = 0$  gar malu 1-2 un  $N_1 + N_2 = 1$ . Visu integrāļu vērtība formulā (4.50) ir

$$\int_{c_{12}} N_i dc = \frac{1}{2} c_{12}$$

kur

$$c_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

un (4.50) var izskaitļot

$$\int_C \mathbf{u}^T \mathbf{T} t dc = \mathbf{q}^T \mathbf{T}_e \quad (4.51)$$

kur

$$\mathbf{q}^T = [q_1, q_2, q_3, q_4, 0, 0]$$

un

$$\mathbf{T}_e^T = \frac{tc_{12}}{2}[T_x, T_y, T_x, T_y, 0, 0]$$

Šie spēki ir jāpieskaita globālam mezglu spēku vektoram  $\mathbf{F}$ . Tāpat vektoram  $\mathbf{F}$  attiecīgos mezglu punktus ir jāpieskaita koncentrētie spēki  $\mathbf{P}^T = [P_x, P_y]$ .

### 4.3.5 Visas konstrukcijas potenciālā enerģija

Tad, kad ir noteikti visi mezglu spēki (tie ir ārējie spēki), var uzrakstīt visas konstrukcijas potenciālo enerģiju

$$\Pi = \frac{1}{2}\mathbf{Q}^T \mathbf{K} \mathbf{Q} - \mathbf{Q}^T \mathbf{F} \quad (4.52)$$

Ievērojot robežnoteikumus, atrisina vienādojumu sistēmu, kas nosaka potenciālās enerģijas minimumu

$$\mathbf{K} \mathbf{Q} = \mathbf{F} \quad (4.53)$$

Atrisinot šo vienādojumu sistēmu, iegūstam pārvietojumus  $\mathbf{Q}$  visos mezglu punktos.

### 4.3.6 Spriegumu aprēķins

Tā kā saskaņā ar formulām (4.32) un (4.33) deformācijas elementā ir konstantas, tad arī spriegumi, ko izskaitļo pēc Huka likuma (4.6) ir konstanti

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{q} \quad (4.54)$$

kur atbilstošos elementa pārvietojumus  $\mathbf{q}$  var dabūt no globālā pārvietojumu vektora  $\mathbf{Q}$ , izmantojot elementu savienojumu matricu (sk. tabulu 4.2). Spriegumi tiek noteikti elementu centrā.

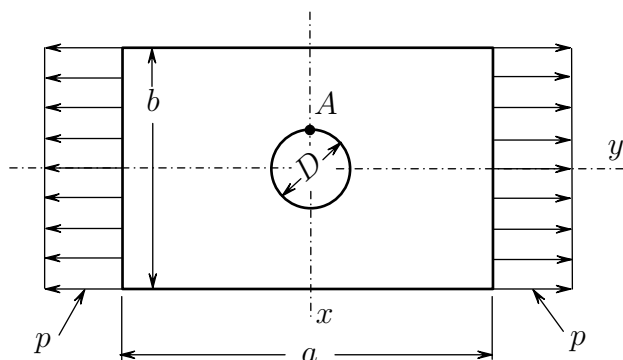
## 4.4 Aprēķina piemērs

Aplūkosim stieptas plātnes ar apaļu caurumu spriegumu aprēķinu (sk. Zīm. 4.9). Izejas dati šim piemēram ir

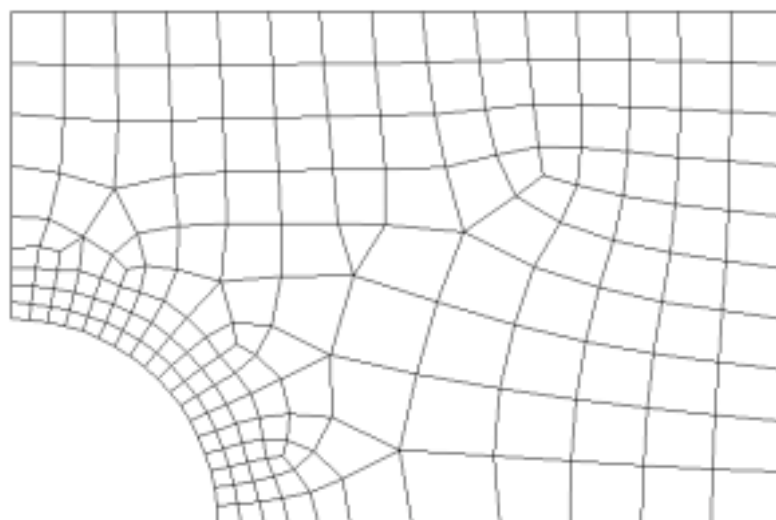
$$E = 200 \text{ GPa}, \quad \nu = 0.3 \quad a = 0.15 \text{ m},$$

$$b = 0.1 \text{ m}, \quad t = 0.01 \text{ m}, \quad D = 0.04 \text{ m}, \quad p = 10^7 \text{ N/m}^2$$

kur  $a$  ir plātnes garums,  $b$  ir platums,  $t$  ir biezums un  $D$  ir cauruma diametrs.



Zīmējums 4.9: Plātne ar caurumu pie stiepes



Zīmējums 4.10: Plātnes ceturdaļas dalījums galīgos elementos

Ir zināms analītiskais aprēķins bezgalīgam apgabalam šādam spriegumu koncentrācijas uzdevumam. Lielākie spriegumi ir cauruma malā punktā  $A$ . Tur saskaņā ar analītisko aprēķinu spriegumi ir  $\sigma_y = 3p$ . Pārbaudīsim, kāds ir spriegumu lielums gadījumā, kad plātnes izmēri ir galīgi.

Uzdevums tiek risināts ar programmu ANSYS. Var risināt plātnes ceturto daļu uz simetrijas asīm uzliekot simetrijas noteikumus

$$u = 0 \text{ pie } x = 0, \quad v = 0 \text{ pie } y = 0$$

Plātnes ceturdaļas sadalījums galīgos elementos ir attēlots Zīm. 4.10.

Šajā piemērā tika lietoti nevis trīsstūra, bet četrstūra galīgie elementi, kuri ir ANSYS elementu bibliotēkā.

Skaitliskā aprēķinā spriegumi punktā  $A$  ir  $\sigma_y = 3.86p$ , tātad tie ir par apmēram 30% lielāki nekā analītiskā aprēķinā bezgalīgai plātnei. Šī starpība ir atkarīga no cauruma diametra  $D$  un izmēriem  $a$  un  $b$ .

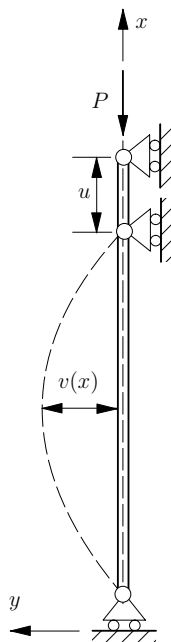




## Nodaļa 5

# Spiesta stieņa noturība

Stieņa noturības problēmu pirmais risināja Eilers 1737. gadā. Viņš ieguva atrisinājumu, ko šodien zina jebkurš students, kurš mācījies materiālu pretestību (sk. piemēram [1]). Eilera kolonna attēlota Zīm. 5.1.



Zīmējums 5.1: Eilera kolonna

Parādīsim kā uzdevumu var atrisināt ar Ritca un galīgo elementu metodi. Šim nolūkam izmantojam liektas sijas galīgo elementu un atbilstošos funkcionāļus, kas aplūkoti 3. nodaļā. Papildus vēl nepieciešams iegūt tā saucamo ģeometrisko stinguma matricu.

## 5.1 Atrisinājums ar Ritca metodi

Spiesta stienā (sk. Zīm. 5.1) noturības uzdevumu var atrisināt ar Ritca metodi. Stienā potenciālo enerģiju  $\Pi$  var uzrakstīt tā

$$\Pi[v(x)] = U - W \quad (5.1)$$

Šeit  $U$  ir tas pats funkcionālis (3.5), kas liektai sijai

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (5.2)$$

Darbs  $W$  ko pastrādā spēks  $P$  pēc stienā noturības zaudēšanas ir

$$W = Pu \quad (5.3)$$

kur  $u$  ir vertikālais pārvietojums pēc kolonnas noturības zaudēšanas. Šo pārvietojumu var izskaitļot no izlieces  $v$  (sk. piem. [1]). Elementa  $ds$  garumu (sk. Zīm. 5.1) var izskaitļot pēc formulas

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dv)^2$$

Tādējādi

$$ds = dx \sqrt{1 + v'^2} \approx dx \left( 1 + \frac{1}{2} v'^2 \right)$$

Tā kā  $du = ds - dx \approx (1/2)v'^2 dx$  un

$$u(L) = \int_0^L du$$

iegūstam sekojošu formulu  $u$  izskaitļošanai

$$u = \frac{1}{2} \int_0^L \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx \quad (5.4)$$

Tātad ārējo spēku darbu var izteikt ar izlieci  $v$  pēc stienā noturības zaudēšanas

$$W = \frac{P}{2} \int_0^L \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx \quad (5.5)$$

Robežnoteikumi kolonnai (sk. Zīm. 5.1) ir

$$v = \left. \vphantom{v} \right|_{x=0} = 0, \quad v = \left. \vphantom{v} \right|_{x=L} = 0 \quad (5.6)$$

Funkcionāļa (5.1) minimizācijai izmanto Ritza metodi. Funkcijas  $v(x)$  aproksimāciju izvēlēties tā, lai tiktu apmierināti galvenie robežnoteikumi (5.6)

$$v(x, t) = a_1 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (5.7)$$

Ieliekot šo aproksimāciju funkcionālī (5.1), ņemot vērā (5.2) un (5.5), pēc integrēšanas iegūstam potenciālo enerģiju  $\Pi$  kā funkciju no koeficienta  $a_1$

$$\Pi(a_1) = \frac{1}{4}a_1^2 \left( \frac{\pi^3 EI}{L^2} - P\pi \right) \quad (5.8)$$

Funkcionāļa minimuma noteikums ir

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = \frac{1}{2}a_1 \left( \frac{\pi^3 EI}{L^2} - P\pi \right) = 0 \quad (5.9)$$

Tā kā noturības zaudēšanas brīdī  $a_1 \neq 0$ , tad nullei pielīdzina izteiksmi, kas ir iekavās. No tās iegūstam stieņa kritisko spēku

$$P_{kr} = EI \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 \quad (5.10)$$

Tā ir Eilera formula kritiskā spēka noteikšanai. Šajā gadījumā ar Ritca metodi iegūtais kritiskais spēks sakrīt ar precīzo vērtību, jo sinusa funkcija atbilst precīzā risinājuma funkcijai.

## 5.2 Aprēķins ar galīgo elementu metodi

Risinot uzdevumu ar GEM stieni, kura garums ir  $L$ , sadala  $NE$  elementos ar garumu  $l = L/NE$ . Katram elementam deformācijas enerģiju (5.2) var uzrakstīt diskrētā formā (3.24)

$$U_e = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K}_e \mathbf{q} \quad (5.11)$$

Ārējā spēka darba funkcionālis (5.5) vienam elementam ir

$$W_e = \frac{P}{2} \int_0^l \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx \quad (5.12)$$

Arī šo funkcionāli var uzrakstīt matricu formā

$$W_e = \frac{P}{2} \int_0^l v^T L_1^T L_1 v dx \quad (5.13)$$

kur  $L_1$  ir diferenciālais operātors

$$L_1 = \frac{\partial}{\partial x} \quad (5.14)$$

Izmantojot aproksimāciju  $v = \mathbf{H}\mathbf{q}$  (3.18) funkcionāli (5.13), iegūstam

$$W_e = \frac{P}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K}_e^G \mathbf{q} \quad (5.15)$$

kur  $\mathbf{K}_e^G$  ir elementa ģeometriskā stinguma matrica

$$\mathbf{K}_e^G = \int_0^l \mathbf{H}^T L_1^T L_1 \mathbf{H} dx \quad (5.16)$$

Šeit formas funkcijas  $\mathbf{H}$  tika definētas ar formulām (3.19) un (3.12). Visa stienā, kas satāv no  $NE$  elementiem, potenciālā enerģija ir

$$\Pi = \sum_{e=1}^{NE} (U_e - W_e) = \frac{1}{2} \mathbf{Q}^T \mathbf{K} \mathbf{Q} - \frac{P}{2} \mathbf{Q}^T \mathbf{K}_G \mathbf{Q} \quad (5.17)$$

Šeit  $\mathbf{K}$  un  $\mathbf{K}_G$  ir visa stienā stinguma un ģeometriskā stinguma matricas

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{NE} \mathbf{K}_{i,e}, \quad \mathbf{K}_G = \sum_{i=1}^{NE} \mathbf{K}_{i,e}^G \quad (5.18)$$

No potenciālās enerģijas (5.17) minimuma, iegūstam

$$\mathbf{K} \mathbf{Q} - P \mathbf{K}_G \mathbf{Q} = 0 \quad (5.19)$$

Tā ir lineārā īpašvērtību problēma. To atrisinot, atrodam kritisko spēku  $P_{kr}$ . Lietojot GEM, var atrast kritisko spēku sarežģītām stienū sistēmām, piemēram, telpiskiem rāmjiem, torņiem, tiltiem un citām konstrukcijām.

### 5.3 Aprēķina piemēri

Stienim, kas attēlots Zīm. 5.1, atradīsim kritisko spēku, izmantojot GEM. Izejas dati ir

$$E = 200 \text{ GPa}, \quad L = 4 \text{ m}, \quad I = 1.08 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

Ieliekot izejas datus formulā (5.10), iegūstam precīzo kritiskā spēka vērtību

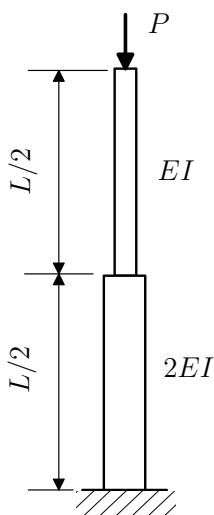
$$P_{kr} = EI \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 = 1.3324 \times 10^5 \text{ N} = 133.24 \text{ kN}$$

Tabula 5.1: Risinājuma konverģence

Elementu skaits $NE$	Kritiskais spēks $kN$
2	134.24
4	133.31
8	133.24

Tuvināto kritiskā spēka vērtību nosakām, atrisinot uzdevumu ar GEM. Vienādojuma (5.19) mazākā īpašvērtība ir stieņa kritiskais spēks. Risinot ar GEM, izmanto dalījumu  $NE = 2, 4, 8$  elementos. Rezultāti apkopoti Tabulā 5.3.

Analizējot rezultātus, kas ir tabulā, redzam labu konverģenci. Pie dalījuma  $NE = 8$  rezultāts praktiski sakrīt ar precīzo vērtību. Jau pie dalījuma  $NE = 2$  kļūda ir mazāka par 1%.



Zīmējums 5.2: Divpakāpju kolonna

Tālāk aplūkosim divpakāpju kolonas, kas attēlota Zīm. 5.2, noturību. Izejas dati ir

$$E = 200 \text{ GPa}, \quad L = 4 \text{ m}, \quad I = 1.08 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

Šī uzdevuma tuvinātam atrisinājumam kritiskais spēks ir [16]

$$P_{\text{kr}} = \frac{4.3EI}{L^2} = 58.05 \text{ kN}$$

Risinot ar GEM, kolonnu sadalām  $NE = 10$  un  $20$  elementos. Iegūtais kritiskais spēks ir  $P_{kr} = 55.81$  kN ( $NE = 10$ ). Pie smalkāka dalījuma  $P_{kr} = 55.10$  kN ( $NE = 20$ ). Ar GEM iegūtais kritiskais spēks ir nedaudz zemāks par aptuveno vērtību. Redzam, ka arī pie rupjāka dalījuma  $NE = 10$  esam ieguvuši samērā precīzu kritiskā spēka vērtību.

Risinot ar GEM, smalks dalījums nepieciešams tikai tad, kad ir jānosaka spriegumi. Noturības un dinamikas uzdevumos ar GEM labu tuvinājumu var iegūt jau pie samēra rupja dalījuma. Dinamikas uzdevumi tiks aplūkoti nākošajā nodaļā.

# Nodaļa 6

## Dinamikas uzdevumi

### 6.1 Ievads

Iepriekšējās nodaļās tika aplūkota GEM izmantošana statikas uzdevumu risināšanā. Uzdevumus var risināt kā statikas tad, ja slodzes pielikšanas ātrums ir neliels. Ja slodze ir pielikta ar lielu ātrumu, jeb, ja slodze ir laikā mainīga, tad ir jāņem vērā konstrukcijas masa un paātrinājums.

Viens no dinamikas pamatuzdevumiem ir konstrukcijas pašsvārstību noteikšana. Reālām konstrukcijām svārstības pēc zināma laika noteikti nodziest, jo materiāls un savienojumi slāpē svārstības. Šajā nodaļā mēs aplūkosim tikai vienkāršākos dinamikas uzdevumus - pašsvārstības lineāri elastīgām konstrukcijām. GEM pielietošana nestacionārās dinamikas uzdevumu risināšanā ir apskatīta monogrāfijā [12] un citur.

### 6.2 Dinamikas uzdevumu formulējums

Definēsim tā saucamo Lagranža funkcionāli

$$\mathcal{L} = T - \Pi \quad (6.1)$$

Kur  $T$  ir konstrukcijas kinētiskā enerģija, bet  $\Pi$  ir potenciālā enerģija.

Mēs varam formulēt Hamiltona principu - laika intervālā  $[t_1, t_2]$  konstrukcijas kustība būs tāda, lai funkcionālis  $H$  pieņemtu ekstremālu vērtību

$$H = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \quad (6.2)$$

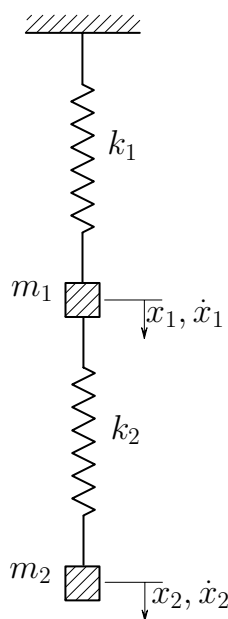
Ja funkcionālis  $\mathcal{L}$  ir izteikts caur mainīgiem  $(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$ , kur  $\dot{q}_i = dq_i/dt$ , tad kustības vienādojumus var uzrakstīt

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.3)$$

Šie kustības vienādojuma izriet no funkcionāļa (6.2) ekstrēma noteikumiem.

### 6.2.1 Kustības vienādojuma piemērs

Lai ilustrētu Hamiltona principu, aplūkosim divu masu, kas savienotas ar atsperēm, kustību (sk. Zīm. 6.1).



Zīmējums 6.1: Divu masu kustība

Divu masu kinētisko un potenciālo enerģiju mēs varam uzrakstīt

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$$

$$\Pi = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2$$

Ņemot vērā, ka  $\mathcal{L} = T - \Pi$ , iegūstam kustības vienādojumus

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 - k_2(x_2 - x_1) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = m_2\ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) = 0$$



Šos vienādojumus var uzrakstīt matricu formā

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = 0 \quad (6.4)$$

vai saīsināti

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = 0 \quad (6.5)$$

kur  $\mathbf{M}$  ir masas matrica,  $\mathbf{K}$  ir stinguma matrica, un  $\ddot{\mathbf{x}}$  un  $\mathbf{x}$  ir vektori, kas raksturo masu pātrinājumus un pārvietojumus.

Līdzīgā veidā var iegūt kustības vienādojumu konstrukcijai, kuras masa ir izkļiedēta. Šajā gadījumā veic konstrukcijas sadalīšanu galīgos elementos, pārvēršot izkļiedēto masu diskrētās masās.

### 6.3 Konstrukcija ar izkļiedētu masu

Aplūkosim trīsdimensiju konstrukciju (sk. Zīm. 6.2), kuras masa ir izkļiedēta. Statikas 3D gadījums ir aplūkots paragrāfā 1.3. Kinētisko enerģiju šai konstrukcijai var uzrakstīt

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} dV \quad (6.6)$$

kur  $\rho$  ir materiāla blīvums un

$$\dot{\mathbf{u}}^T = [\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}] \quad (6.7)$$

ir pārvietojumu ātrumi.

GEM mēs varam uzrakstīt pārvietojumu aproksimācijas elementā, izmantojot formas funkcijas  $\mathbf{N}$  un mezglu pārvietojumus  $\mathbf{q}$

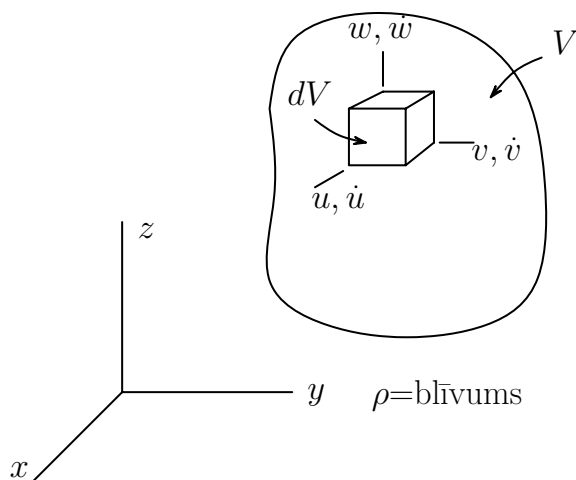
$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{q}$$

Tādā pašā veidā dinamikas uzdevumos tiek aproksimēts ātruma vektors

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{N}\dot{\mathbf{q}}$$

Izmantojot šo sakarību un formulu (6.6) mēs varam uzrakstīt kinētisko enerģiju galīgam elementam

$$T_e = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \left[ \int_e \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \right] \dot{\mathbf{q}} \quad (6.8)$$



Zīmējums 6.2: Konstrukcija ar izkļiedētu masu

kur iekavās ir elementa masas matrica

$$\mathbf{m}_e = \int_e \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \quad (6.9)$$

Šo matricu sauc par saskaņoto masas matricu, jo tā ir saskaņota ar pārvietojumu formas funkcijām.

Visas konstrukcijas kinētisko enerģiju iegūstam summējot elementu kinētiskās enerģijas

$$T = \sum_e T_e = \sum_e \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{m}_e \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{Q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{Q}} \quad (6.10)$$

Konstrukcijas potenciālā enerģija ir

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{Q}^T \mathbf{K} \mathbf{Q} - \mathbf{Q}^T \mathbf{F} \quad (6.11)$$

Izmantojot formulas (6.2) un (6.3), iegūstam

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{Q}} + \mathbf{K} \mathbf{Q} = \mathbf{F} \quad (6.12)$$

Pašsvārstību gadījumā  $\mathbf{F} = 0$  un

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{Q}} + \mathbf{K} \mathbf{Q} = 0 \quad (6.13)$$

Harmonisku svārstību gadījumā pārvietojumi ir

$$\mathbf{Q} = \mathbf{U} \sin \omega t \quad (6.14)$$

kur  $\mathbf{U}$  ir mezglu pārvietojumu amplitūdas un  $\omega = 2\pi f$  (rad/s) ir cirkulārā frekvence un  $f$  ir frekvence (cikli sekundē jeb Hz). Ieliekot formulu (6.14) vienādojumā (6.13), iegūstam

$$\mathbf{KU} = \omega^2 \mathbf{MU} \quad (6.15)$$

Šo vienādojumu var uzrakstīt kā vispārināto īpašvērtību problēmu

$$\mathbf{KU} = \lambda \mathbf{MU} \quad (6.16)$$

kur  $\mathbf{U}$  ir īpašvektors, kurš raksturo svārstību formu, kas atbilst īpašvērtībai  $\lambda = \omega^2$ . Nosakot vienādojuma (6.16) īpašvērtības, var atrast konstrukcijas visas pašsvārstību frekvences  $f_i$ .

## 6.4 Galīgo elementu masas matricas

Jebkuram galīgam elementam ar konstantu blīvumu elementa robežās masas matricu var izskaitļot pēc formulas (6.9)

$$\mathbf{m}_e = \int_e \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \quad (6.17)$$

### 6.4.1 Viendimensiju stienis

Viendimensiju stienis tika aplūkots 2. nodaļā. Stieņa elementam, kas attēlots Zīm. 6.3,  $\mathbf{q}$  un  $\mathbf{N}$  ir

$$\mathbf{q}^T = [q_1, q_2], \quad \mathbf{N} = [N_1, N_2]$$

kur

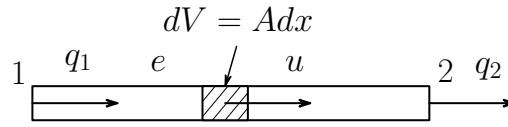
$$N_1 = \frac{1 - \xi}{2}, \quad N_2 = \frac{1 + \xi}{2}$$

Tad no formulas (6.17), iegūstam

$$\mathbf{m}_e = \int_e \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV = \frac{\rho A l}{2} \int_{-1}^{+1} \mathbf{N} \mathbf{N} d\xi \quad (6.18)$$

kur  $A$  ir elementa šķērsriezuma laukums un  $l$  ir elementa garums. Pēc integrēšanas, iegūstam

$$\mathbf{m}_e = \frac{\rho A l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (6.19)$$



Zīmējums 6.3: Stieņa elements

### 6.4.2 Liekta sija

Izskaitļosim masas matricu sijas elementam (sk. Zīm. 6.4). Sijas galīgais elements tika aplūkots 3. nodaļā. Pārvietojumu aproksimācija sijas elementā tika veikta, izmantojot Ermita polinomus

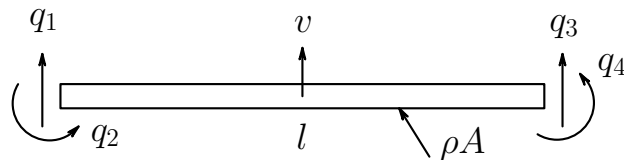
$$v = \mathbf{H}q$$

Tad masas matricu var izskaitļot pēc formulas

$$\mathbf{m}_e = \int_{-1}^{+1} \mathbf{H}^T \mathbf{H} \rho A \frac{l}{2} d\xi \quad (6.20)$$

Integrējot šo izteiksmi, iegūstam

$$\mathbf{m}_e = \frac{\rho A l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ \text{Sym.} & & 156 & -22l \\ & & & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (6.21)$$



Zīmējums 6.4: Sijas galīgais elements

### 6.4.3 Trīsstūra elements

Izskaitļosim masas matricu trīsstūra elementam (sk. Zīm. 6.5). Trīsstūra galīgais elements tika aplūkots 4. nodaļā. Pārvietojumu aproksimācija trīsstūra elementā tika veikta, izmantojot formas funkcijas  $N_i$  (sk. formulu (4.16))

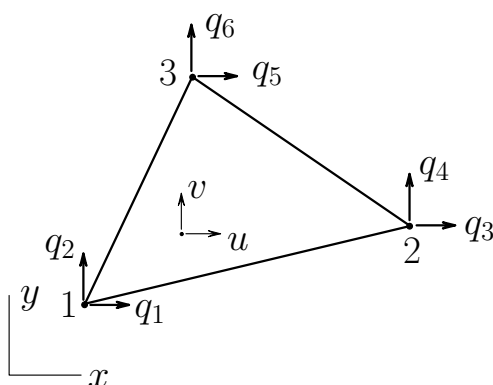
$$\mathbf{u} = \mathbf{N}q$$

kur

$$\mathbf{u}^T = [u, v]$$

$$\mathbf{q}^T = [q_1, q_2, \dots, q_6]$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix}$$



Zīmējums 6.5: Trīsstūra galīgais elements

Elementa masas matrica ir

$$\mathbf{m}_e = \rho t \int_e \mathbf{N}^T \mathbf{N} dA$$

Ievērojot, ka

$$\int_e N_1^2 dA = \frac{1}{6} A_e, \quad \int_e N_1 N_2 dA = \frac{1}{12}, \quad \text{utt.}$$

iegūstam elementa masas matricu

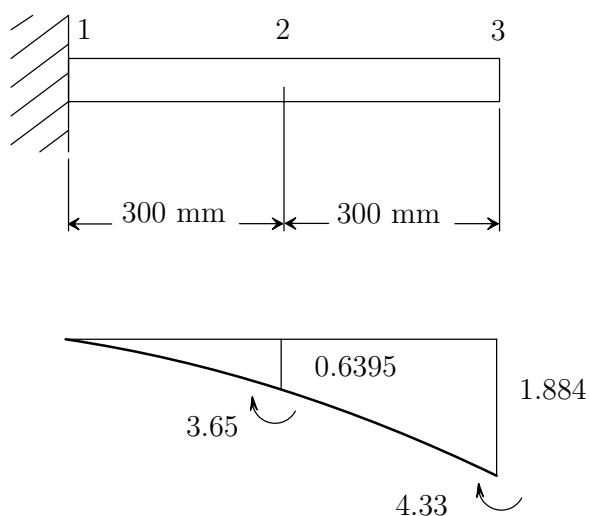
$$\mathbf{m}_e = \frac{\rho A_e t}{12} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ & & 2 & 0 & 1 & 0 \\ & & & 2 & 0 & 1 \\ \text{Sym.} & & & & 2 & 0 \\ & & & & & 2 \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

## 6.5 Pašvārstību aprēķina piemēri

### 6.5.1 Konsolsijas svārstību aprēķins

Noteiksim pašvārstību frekvenci konsolsijai, kas attēlota Zīm. 6.6. Sijas materiāla parametri un izmēri ir

$$E = 200 \text{ GPa}, \quad \rho = 7840 \text{ kg/m}^3, \quad I = 2000 \text{ mm}^4, \quad A = 240 \text{ mm}^2$$



Zīmējums 6.6: Konsolsija un tās pirmā svārstību forma

Siju sadalām divos galīgos elementos. Tātad šim uzdevumam ir tikai 4 brīvības pakāpes  $Q_3, Q_4, Q_5$  un  $Q_6$ , jo iespīlējumā  $Q_1 = Q_2 = 0$ .

Pašvārstību frekvences nosakām no vienādojuma

$$\mathbf{KU} = \lambda \mathbf{MU}$$

kur stinguma un masas matricas ir

$$\mathbf{K} = 10^3 \begin{bmatrix} 355.56 & 0 & -177.78 & 26.67 \\ & 10.67 & -26.67 & 2.667 \\ \text{Sym.} & & 177.78 & -26.67 \\ & & & 5.33 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = 10^3 \begin{bmatrix} 0.4193 & 0 & 0.0726 & -0.0052 \\ & 0.000967 & 0.0052 & -0.00036 \\ \text{Sym.} & & 0.2097 & -0.0089 \\ & & & 0.00048 \end{bmatrix}$$

Izmantojot šīs matricas, atrisina īpašvērtību problēmu. Šim nolūkam var izmantot programmas MathCAD vai MATLAB. Atrisinājums ir šāds. Zemākā īpašvērtība ir

$$\lambda_1 = 2.03 \times 10^4$$

un atbilstošais īpašvektors, kas raksturo pirmo svārstību formu ir

$$U_1^T = [0.6395, 3.65, 1.884, 4.33]$$

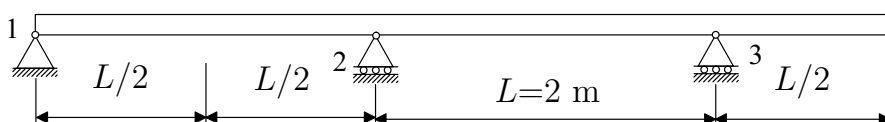
Tātad  $\omega_1 = \sqrt{\lambda_1} = 10^2 \sqrt{2.03} = 142.48$  rad/s un pirmā pašsvārstību frekvence  $f_1 = \omega_1/2\pi = 22$  Hz. Pirmā svārstību forma ir parādīta Zīm. 6.6.

Šim uzdevumam ir zināms analītiskais atrisinājums. Pirmā pašsvārstību frekvence ir

$$\omega_1 = 1.8751^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}}$$

Ieliekot parametru skaitliskās vērtības, iegūstam  $\omega_1 = 142.40$  rad/s, kas ir frekvences precīzā vērtība. Tātad, risinot uzdevumu ar GEM un sadalot siju tikai divos elementos, esam ieguvuši frekvenci, kas ir tikai par 0.06% lielāka kā precīzā vērtība.

### 6.5.2 Daudzlaidumu sijas svārstību aprēķins



Zīmējums 6.7: Daudzlaidumu sija ar konsoli

Aplūkosim daudzlaiduma sijas, kas attēlota Zīm. 6.7, pašsvārstību frekvenču aprēķinu. Dotie lielumi ir

$$E = 200 \text{ GPa}, \quad I = 4 \times 10^6 \text{ mm}^4, \quad \rho = 7840 \text{ kg/m}^3$$

Sijas laidumu izmēri parādīti zīmējumā.

Sija tika reķināta ar GEM programmu ANSYS. Sijas svārstību vienādojums (6.16) tika risināts, izmantojot Lancoša metodi īpašvērtību

atrašanai. Pirmā pašsvārstību frekvence šai sijai ir  $f_1 = 252$  Hz, kas atbilst sijas stiepes (kā stienim) svārstību formai. Otrā pašsvārstību frekvence ir  $f_1 = 727$  Hz, kas atbilst sijas lieces svārstību formai.

Galīgo elementu metode ir ļoti piemērota konstrukciju noturības un dinamikas uzdevumu risināšanai. Šajā gadījumā nav nepieciešams ļoti smalks dalījums, lai iegūtu labu precizitāti.



# Nodaļa 7

## Kopnes un rāmji

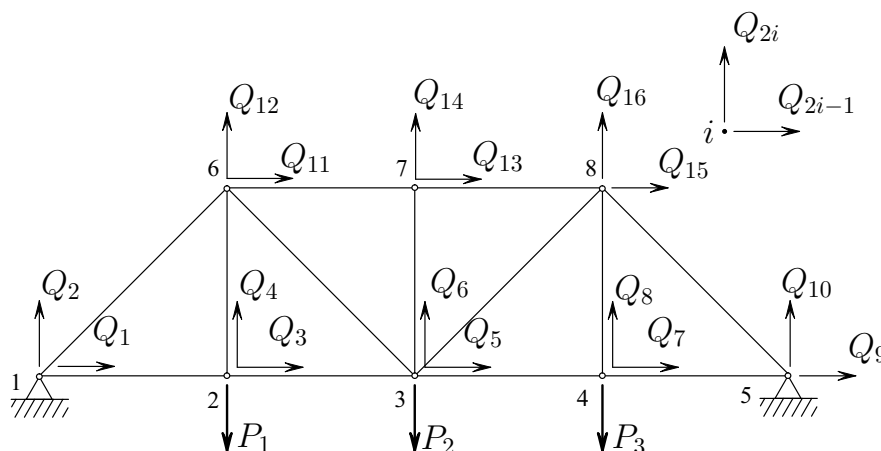
Līdz šim mēs esam aplūkojuši konstrukcijas, kurām montējot galīgos elementus nav nepieciešams izmantot koordinātu transformācijas. Tomēr liela daļa reālo konstrukciju ir sastādītas no elementiem, kuru lokālās assis un konstrukcijas globālās assis nesakrīt. Tādas konstrukcijas ir kopnes un rāmji. Var būt gan telpiskas (3D) kopnes un rāmji, gan plakanas kopnes un rāmji, kuru elementi ir izvietoti divās dimensijās (2D). Šeit aplūkosim tikai plakanas kopnes un rāmjus. Telpiskas konstrukcijas gadījumā pieeja ir analogiska kā divdimensiju gadījumā, tikai 3D konstrukcijām elementu montāžā izmanto 3D transformācijas formulas.

### 7.1 Kopnes

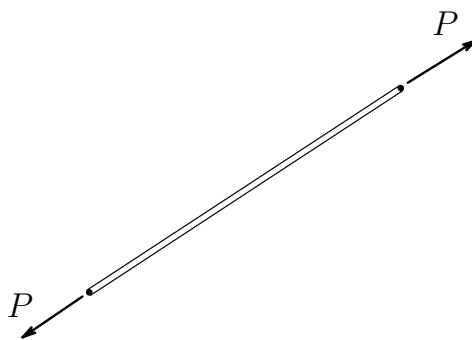
Tipiska plakana (2D) kopne ir attēlota Zīm. 7.1. Ja kopnes stieņu savienojuma vietā ir locīkla, tad kopnes elementi (stieņi) ir vai nu tikai stiepti, vai spiesti (sk. Zīm. 7.2). Šādu kopni ir viegli aprēķināt, izmantojot, piemēram, šķēluma metodi. Tomēr, izmantojot GEM, var noteikt ne tikai piepūles kopnes stieņos, bet arī mezglu pārvietojumus. Zīm. 7.1 attēlotajai kopnei 8 mezglos pavisam ir 16 mezglu pārvietojumi, kurus var noteikt, izmantojot standarta GEM algoritmu. Vienīgā atšķirība ar iepriekš aplūkotiem gadījumiem ir, ka stieņiem ir dažāda orientācija un tāpēc jālieto lokālā un globālā koordinātu sistēmas.

#### 7.1.1 Lokālā un globālā koordinātu sistēma

Tipisks plakanas kopnes elements lokālā un globālā koordinātu sistēmā ir parādīts Zīm. 7.3. Elementa mezglu lokālie numuri ir 1 un 2. Lokālā koordināte ir  $x'$ , kas sākas mezglā 1. Visi lielumi lokālā koordinātu sistēmā ir



Zīmējums 7.1: Plakana kopne



Zīmējums 7.2: Kopnes stienis

apzīmēti ar ( $'$ ). Globālā koordinātu sistēmā ir  $x, y, z$ , kur koordināta  $z$  ir perpendikulāra kopnes plaknei. Koordinātu sistēma  $x, y, z$  ir labā koordinātu sistēma.

Globālā koordinātu sistēmā katram mezglam ir divas brīvības pakāpes. Globālie pārvietojumi mezglam  $i$  ir  $Q_{2i-1}$  un  $Q_{2i}$  (sk. Zīm. 7.1).

Ar  $q'_1$  un  $q'_2$  ir apzīmēti mezglu 1 un 2 pārvietojumi lokālā koordinātu sistēmā. Tātad elementa pārvietojumu vektors lokālā koordinātu sistēmā ir

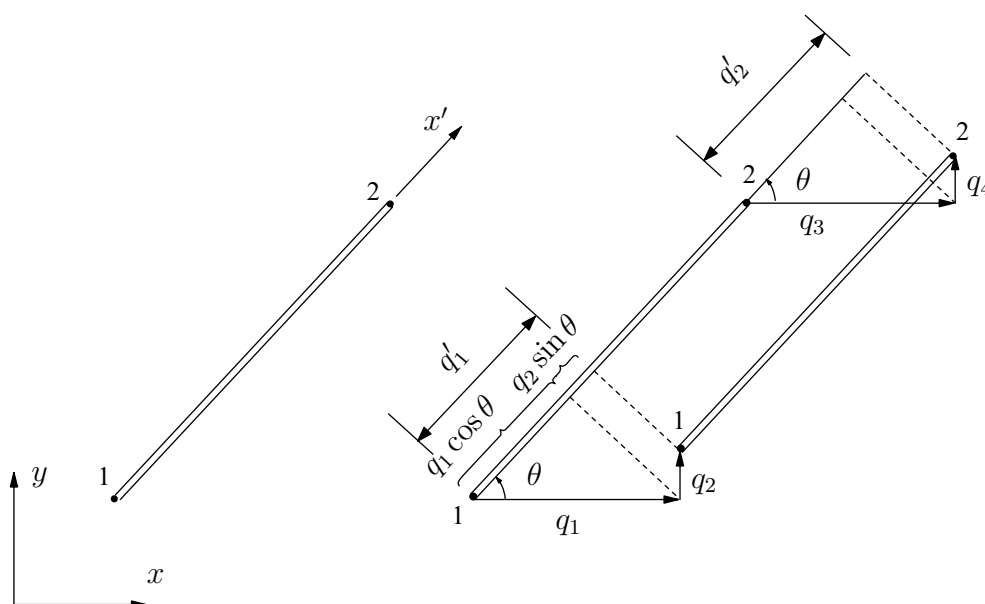
$$\mathbf{q}' = [q'_1, q'_2]^T \quad (7.1)$$

Globālā koordinātu sistēmā  $x, y$  elementa pārvietojumu vektors ir

$$\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3, q_4]^T \quad (7.2)$$

Sakarību starp  $\mathbf{q}'$  un  $\mathbf{q}$  var iegūt, apskatot Zīm. 7.3

$$q'_1 = q_1 \cos \theta + q_2 \sin \theta, \quad q'_2 = q_3 \cos \theta + q_4 \sin \theta \quad (7.3)$$



Zīmējums 7.3: Kopnes stienis lokālā un globālā koordinātu sistēmā

Ievēdīsim apzīmējumus tā saucamajiem virziena kosinusiem  $n$  un  $m$

$$n = \cos \theta, \quad m = \cos \phi = \sin \theta$$

kur  $\phi = 90^\circ - \theta$ . Virziena kosinusi  $n$  un  $m$  ir leņķi starp lokālo asi  $x'$  un globālām asīm  $x, y$ . Formulas (7.3) var uzrakstīt matricu formā

$$\mathbf{q}' = \mathbf{L}\mathbf{q} \quad (7.4)$$

kur  $\mathbf{L}$  ir transformāciju matrica

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} n & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & m \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

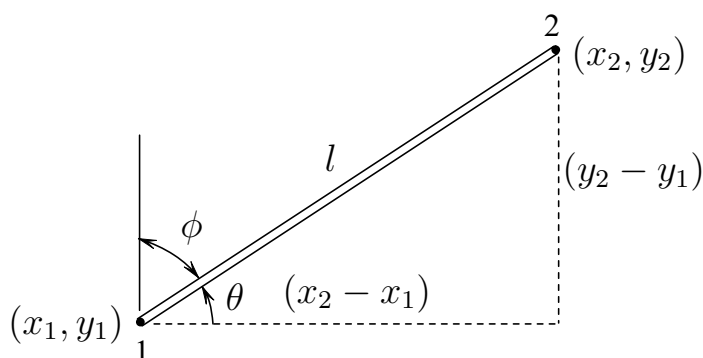
Izmantojot mezglu punktu koordinātes, ir viegli izskaitļot virziena kosinusus  $n$  un  $m$ . Apzīmējot mezgla 1 koordinātes ar  $(x_1, y_1)$  un mezgla 2 ar  $(x_2, y_2)$ , no Zīm. 7.4 iegūstam

$$n = \cos \theta = \frac{x_2 - x_1}{l}, \quad m = \cos \phi = \sin \theta = \frac{y_2 - y_1}{l} \quad (7.6)$$

kur  $l$  ir elementa garums

$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (7.7)$$

Tādējādi, no mezglu punktu koordinātēm var izskaitļot visus lielumus, kas raksturo kopnes ģeometriju.



Zīmējums 7.4: Virziena kosinusu noteikšana

### 7.1.2 Elementa stinguma matrica

Kopnes elements ir viendimensionāls elements tad, kad to aplūko lokālās koordinātēs. Šo elementu mēs apskatījām 2. nodaļā. Elementa stinguma matrica tika noteikta ar formulu (2.42)

$$\mathbf{K}'_e = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

Tālāk iegūsim šo elementa stinguma matricu globālās koordinātēs. Elementa deformācijas potenciālā enerģija lokālās koordinātēs ir

$$U_e = \frac{1}{2} \mathbf{q}'^T \mathbf{K}'_e \mathbf{q}' \quad (7.9)$$

Izmantojot šeit formulu (7.4), iegūstam

$$U_e = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{L}^T \mathbf{K}'_e \mathbf{L} \mathbf{q} \quad (7.10)$$

vai

$$U_e = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K}_e \mathbf{q} \quad (7.11)$$

kur  $\mathbf{K}_e$  ir elementa stinguma matrica globālās koordinātēs

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{L}^T \mathbf{K}'_e \mathbf{L} \quad (7.12)$$

Izmantojot šeit formulas (7.5) un (7.8), iegūstam

$$\mathbf{K}_e = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} n^2 & nm & -n^2 & -nm \\ nm & m^2 & -nm & -m^2 \\ -n^2 & -nm & l^2 & nm \\ -nm & -m^2 & nm & m^2 \end{bmatrix} \quad (7.13)$$

Izmantojot šo matricu, visas konstrukcijas stinguma matricu iegūst parastā veidā.

### 7.1.3 Spriegumu aprēķins

Viendimensiju elementam, kas attēlots Zīm. 7.2, spriegumi tiek aprēķināti pēc formulas

$$\sigma = E\epsilon \quad (7.14)$$

kur  $\epsilon$  ir deformācijas stienī

$$\epsilon = E \frac{q'_2 - q'_1}{l} = \frac{E}{l} [-1 \ 1] \begin{Bmatrix} q'_1 \\ q'_2 \end{Bmatrix} \quad (7.15)$$

Izmantojot formulu (7.4)  $\mathbf{q}' = \mathbf{L}\mathbf{q}$ , iegūstam

$$\sigma = \frac{E}{l} [-1 \ 1] \mathbf{L}\mathbf{q} \quad (7.16)$$

vai, izmantojot formulu (7.5), iegūstam izteiksmi spriegumu izskaitļošanai stienī caur mezglu pārvietojumiem  $\mathbf{q}$  globālā koordinātu sistēmā

$$\sigma = \frac{E}{l} [-n \ -m \ n \ m] \mathbf{q} \quad (7.17)$$

Stiepes spriegumam ir pozitīva vērtība, spiedes - negatīva.

## 7.2 Plakanu rāmju aprēķins

Plakanu rāmju aprēķinā globālo stinguma matricu arī formē līdzīgā veidā kā kopnei, izmantojot transformācijas matricas. Rāmim lokālo stinguma matricu izveido, summējot stieņa un sijas galīgo elementu matricas, jo rāmja elements reizē ir gan liekts, gan stiepts vai spiests (sk. Zīm. 7.5).

Katrā rāmja mezglā ir trīs brīvības pakāpes - divi pārvietojumi un pagrieziena lenķis. Elementa mezglu pārvietojumu vektors ir

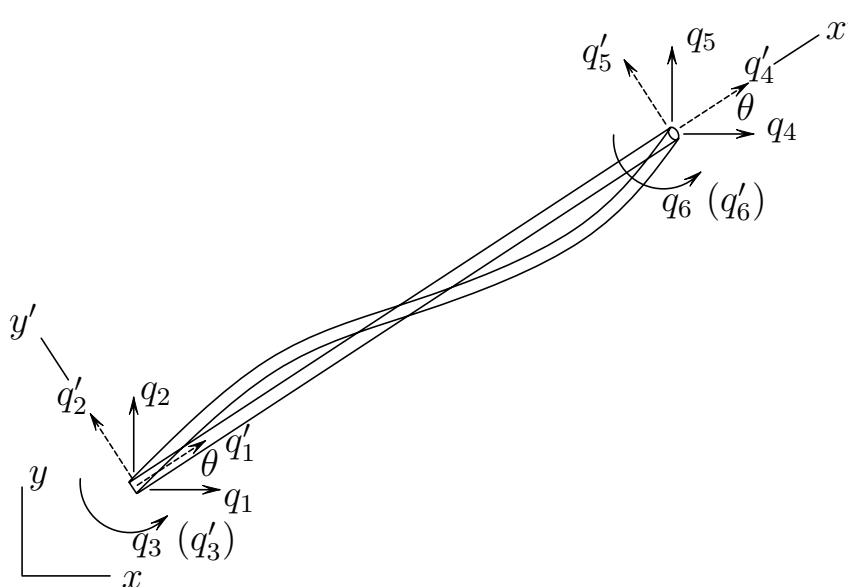
$$\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6] \quad (7.18)$$

Lokālās koordinātu asis ir  $x', y'$  un globālās koordinātu asis ir  $x, y$ . Lokālo asu stāvokli nosaka virziena kosinusi  $n$  un  $m$

$$n = \cos \theta, \quad m = \sin \theta$$

Virziena kosinusus tāpat kā kopnei var noteikt saskaņā ar Zīm. 7.4. No Zīm. 7.5 ir redzams, ka pagrieziena lenķi lokālās un globālās asīs ir vienādi

$$q'_3 = q_3, \quad q'_6 = q_6$$



Zīmējums 7.5: Rāmja elements

un pārvietojumu transformāciju no lokālām uz globālām asīm nosaka formula

$$\mathbf{q}' = \mathbf{L}\mathbf{q} \quad (7.19)$$

kur  $\mathbf{L}$  ir transformācijas matrica

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} n & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m & n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.20)$$

Var redzēt, ka  $q'_2, q'_3, q'_5$  un  $q'_6$  faktiski ir sijas brīvības pakāpes, bet  $q'_1$  un  $q'_4$  ir stieņa brīvības pakāpes. Sijas elements tika aplūkots 3. nodaļā, bet stieņa elements 2. nodaļā. Kombinējot sijas un stieņa stinguma matricas, iegūstam

rāmja elementa stinguma matricu lokālās koordinātēs

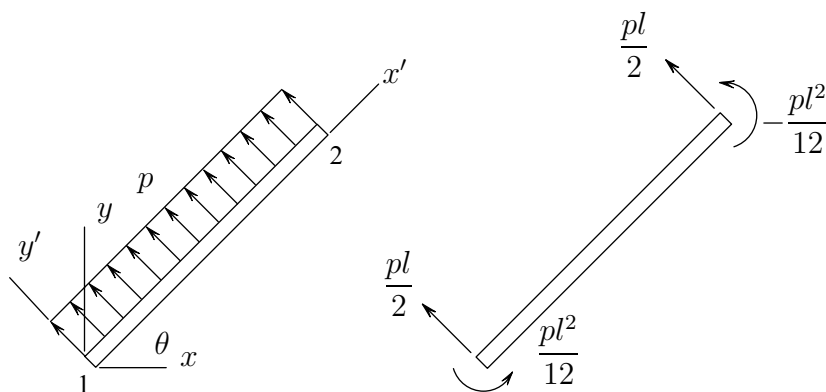
$$\mathbf{K}'_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \quad (7.21)$$

Rāmja elementa deformācijas potenciālā enerģija ir

$$U_e = \frac{1}{2} \mathbf{q}'^T \mathbf{K}'_e \mathbf{q}' = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{L}^T \mathbf{K}'_e \mathbf{L} \mathbf{q} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K}_e \mathbf{q} \quad (7.22)$$

kur  $\mathbf{K}_e$  ir galīgā elementa stinguma matrica globālās koordinātēs

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{L}^T \mathbf{K}'_e \mathbf{L} \quad (7.23)$$



Zīmējums 7.6: Izkliedēta slodze uz rāmja elementu

Mezglu spēku vektors tiek noteikts analogiski. Pie izkliedētas slodzes uz rāmja elementu (sk. Zīm. 7.6) ārējo spēku darbs ir

$$W_e = \mathbf{q}'^T \mathbf{f}' = \mathbf{q}^T \mathbf{L}^T \mathbf{f}' = \mathbf{q}^T \mathbf{f} \quad (7.24)$$

kur  $\mathbf{f}'$  ir mezglu spēki lokālās koordinātēs

$$\mathbf{f}'^T = \left[ 0, \frac{pl}{2}, \frac{pl^2}{12}, 0, \frac{pl}{2}, -\frac{pl^2}{12} \right] \quad (7.25)$$

un  $\mathbf{f}$  ir mezglu spēki globālās koordinātēs

$$\mathbf{f} = \mathbf{L}^T \mathbf{f}' \quad (7.26)$$

Mezglu spēku vērtības tiek pieskaitītas globālam spēku vektoram. Arī koncentrētie spēki un momenti tiek pieskaitīti globālam spēku vektoram. Tādā veidā iegūstam GEM vienādojumu sistēmu visai konstrukcijai

$$\mathbf{KQ} = \mathbf{F}$$

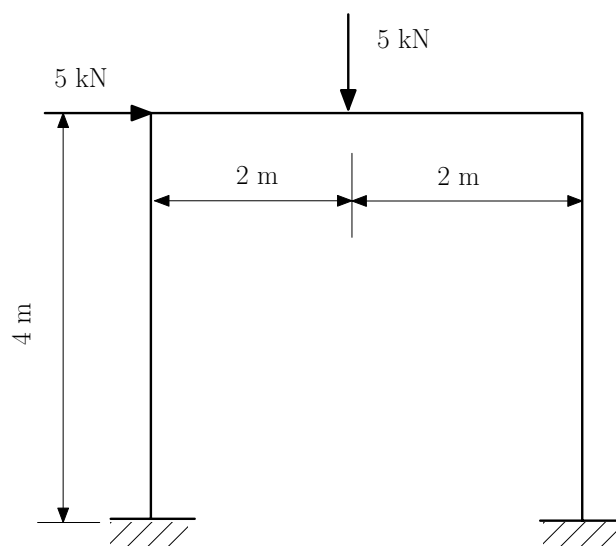
To atrisinot, iegūstam visas konstrukcijas mezglu pārvietojumus  $\mathbf{Q}$  globālās koordinātēs  $x, y$ . Pēc tam izskaitļo katra elementa pārvietojumus lokālās koordinātēs  $x', y'$

$$\mathbf{q}' = \mathbf{Lq}$$

No  $\mathbf{q}'$  parastā veidā var izskaitļot spriegumus. To veic tāpat kā šijā un stienī (sk. 2. un 3. nodaļu).

### 7.3 Rāmja aprēķina piemērs

Apskatīsim rāmja, kas attēlots Zīm. 7.7, aprēķinu. Rāmis ir noslogots ar diviem koncentrētiem spēkiem.



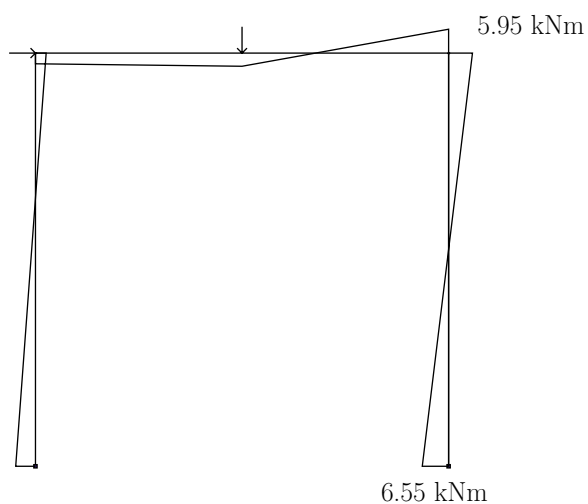
Zīmējums 7.7: Rāmis ar horizontālu un vertikālu slodzi



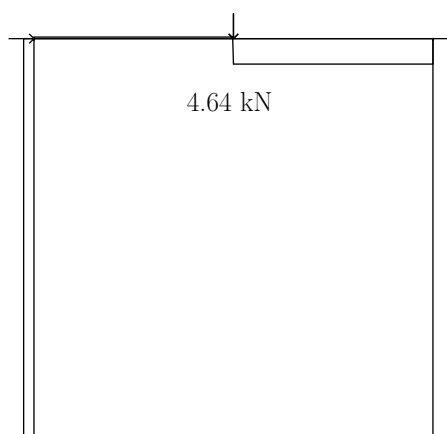
Rāmis izgatavots no tērauda stieņiem ar kvadrātveida šķērsriezumu. Izejas dati ( $W$  ir šķēluma pretestības moments) aprēķinam ir

$$E = 200 \text{ GPa}, \quad I = 1.08 \times 10^{-6} \text{ m}^4, \quad a = 0.06 \text{ m}, \quad W = 36 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

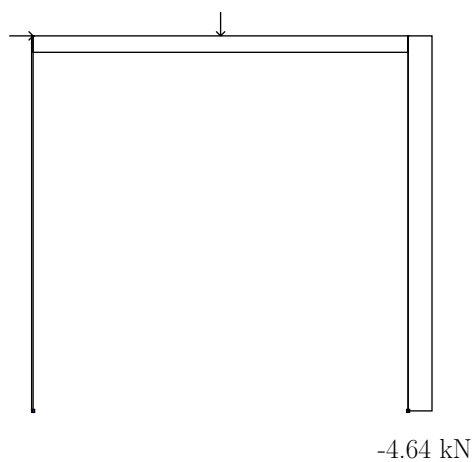
Aprēķins tika veikts ar GEM programmu LIRA. Lieces momentu, šķērsspēku un aksiālo spēku epīras ir parādītas Zīm. 7.8, 7.9 un 7.10.



Zīmējums 7.8: Lieces momentu epīra



Zīmējums 7.9: Šķērsspēku epīra



Zīmējums 7.10: Aksiālo spēku epīra

Apskatot epīras, konstatējam, ka aprēķina piepūles ir

$$N = 4.64 \text{ kN} \quad M = 6.55 \text{ kNm}$$

Izmantojot šīs piepūles, mēs varam sarēķināt maksimālos spriegumus rāmī ( $A$  ir statņa šķērsriezuma laukums)

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{W} = 183.2 \text{ MPa}$$

Protams, bez stiprības aprēķina šim rāmim vēl ir jāveic noturības aprēķins. Šo aprēķinu veicam ar GEM programmu ANSYS. Rāmja aprēķinātais kritiskais spēks ir  $P_{kr} = 188.8 \text{ kN}$ , kas atbilst vispārējai noturības zaudēšanas formai.

# Nodaļa 8

## Galīgo elementu programmas

### 8.1 Komerčiālās programmas

Jau 1960os gados GEM izstrādātāji aptvēra, ka metodes spēks slēpjas tās praktiskās izmantošanas iespējās. Tad pat parādījās pirmās GEM komerciālās programmas - STRUDL (1965, ASV), NASTRAN (1967, ASV), ASKA (1968, VFR). To iespējas gan nevar salīdzināt ar šodienas programmām.

Tomēr jau no paša sākuma izstrādātāji saprata, ka GEM programmas nevar saturēt tikai analīzes daļu (tā saucamais PROSEORS), bet tai jā satur arī datu sagatavošanas daļu (PRE-PROCESORS) un datu apstrādes un grafiskās reprezentācijas daļu (POST-PROCESORS). Šodien visas GEM komerciālās programmas satur šīs daļas.

PRE-PROCESORS ir GEM programmas daļa, ar kuras palīdzību var veikt objekta ģeometrisko modelēšanu un konstrukcijas sadalīšanu galīgos elementos. PRE-PROCESORS var tikt savienots ar CAD programmām, tadām kā AutoCAD (izmanto mašīnbūvē un būvniecībā), CATIA (izmanto lidmašīnu projektēšanā), CADKEY, PRO ENGINEER un citām. Ar CAD programmām var sagatavot ģeometrisko modeli ļoti sarežģītām konstrukcijām, pat tādām, kurām ir vairāki miljoni brīvības pakāpēs. Tādas ir, piemēram, urbšanas platformas jūrā, kuģi, lidmašīnas, lieli tilti un citas konstrukcijas.

PROCESORS ir GEM programmas analīzes daļa, kurā notiek GEM rēķins. Tā parasti satur statikas un dinamikas aprēķinu, materiālu lineāro (Huka likums) un nelineāro (plastiskums, šļūde) modelēšanu, kā arī risina kontaktuzdevumus, konstrukciju ģeometriski nelineāros un citus uzdevumus.

POST-PROCESORS ir GEM programmas daļa, kura tiek izmantota aprēķina rezultātu grafiskai reprezentācijai. Ir saprotams, ka konstrukcijai ar

daudziem tūkstošiem, pat miljoniem galīgo elementu, rezultātus kopumā var uztvert tikai grafiskā veidā. Var apskatīt konstrukcijas deformēto stāvokli, spriegumu un deformāciju laukus utt. No grafiskās informācijas var atrast visvairāk noslogotās vietas, kurās var pieprasīt rezultātu skaitliskās vērtības.

Pasaulē ir ļoti daudzas komerciālās GEM programmas. Aplūkosim dažas vislabākās. Rīgas Tehniskās Universitātes Būvkonstrukciju automatizētās projektēšanas grupā ir pieredze dažu no tām lietošanā (NISA II, ANSYS, LS-DYNA, GT STRUDL, ALGOR, LIRA). Šeit tiek dota tikai pavisam īsa informācija. Pilnīgāku informāciju var iegūt, apskatot norādītās Web adreses.

LS-DYNA ([www.lstc.com](http://www.lstc.com)) ir viena no labākajām GEM programmām nelineāriem rēķiniem. Tā risina tikai nelineāros uzdevumus, kur konstrukcijas deformēšanās process tiek aplūkots laikā. Pat statikas uzdevumus risina kā dinamikas uzdevumus. Tas nodrošina skaitliskā procesa stabilitāti. Lieto mašīnbūvē, aviācijas un kosmosa tehnikas konstrukciju aprēķinos.

ABAQUS ([www.abaqus.com](http://www.abaqus.com)), kurai ir divas versijas ABAQUS/Explicit, kas ir līdzīga LS-DYNA un ABAQUS/Standard. ABAQUS tiek uzskatīta par labāko programmu pasaulē ļoti sarežģītiem nelineāriem aprēķiniem. LS-DYNA tiek novērtēta kā līdzvērtīga. ABAQUS izmanto tādās pašās tehnikas nozarēs kā LS-DYNA.

ANSYS ([www.ansys.com](http://www.ansys.com)) ir viena no populārākām pasaulē. Tā ir ērti lietojama programma ar daudzām iespējām. Lieto mašīnbūvē, var lietot arī dažu būvkonstrukciju aprēķinā. Programmai ir arī studentu versija.

NISA ([www.emrc.com](http://www.emrc.com)) pēc iespējām līdzīga ANSYS, bet atpalciek no tās materiālu nelineārās modelēšanas iespējās. Lieto tādās pašās nozarēs kā ANSYS.

ALGOR ([www.algor.com](http://www.algor.com)) iespējas un lietošanas nozares ir līdzīgas kā GEM programmai ANSYS.

COSMOS ([www.cosmosm.com](http://www.cosmosm.com)) un MARC ([www.mscsoftware.com](http://www.mscsoftware.com)) visumā ir līdzīgas un lietošanas nozares tādās pašās kā ANSYS.

LIRA ([www.lira.com.ua](http://www.lira.com.ua)) ir specializēta būvkonstrukciju aprēķina programma, kas izstrādāta Kijevā, Ukrainā. To lieto visās tajās valstīs, kurās būvkonstrukciju aprēķinos izmanto SNIP normas, arī Latvijā.

GT-STRUDL ([www.gtstrudl.gatech.edu](http://www.gtstrudl.gatech.edu)) ir specializēta būvkonstrukciju aprēķina programma, kas izstrādāta pamatojoties uz amerikāņu būvnormām.

PRO ENGINEER ([www.ptc.com](http://www.ptc.com)) ir CAD programma ar plašām papildus iespējām veikt sarežģītu objektu ģeometrisko modelēšanu.

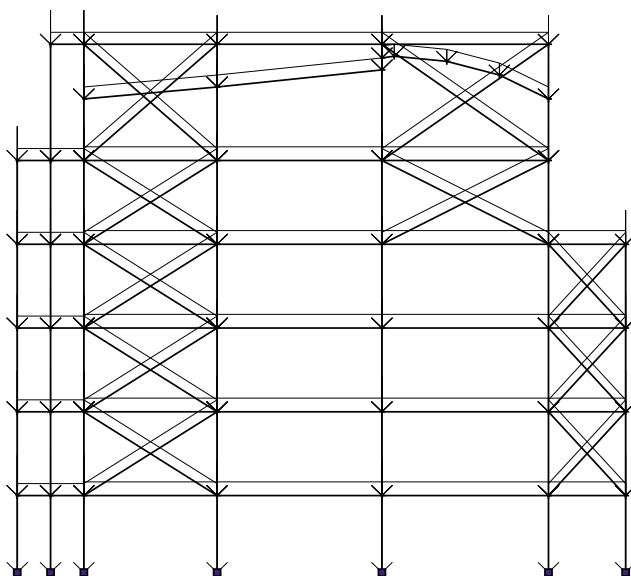
AutoCAD ir CAD programma (ir atsevišķas versijas mašīnbūvei un būvkonstrukcijām) ar plašām iespējām veikt sarežģītu objektu ģeometrisko modelēšanu. Ir arī studentu versija.

Bez augstāk minētām ir arī citas programmas. Piemēram IDEAS, ADINA, NASTRAN un citas.

## 8.2 Konstruktiju aprēķina piemēri

### 8.2.1 Rāmja aprēķins

Specializēta būvkonstruktiju aprēķina programma ir LIRA. Statikas aprēķinos tā balstās uz galīgo elementu pārvietojumu metodi. Ar LIRU var sarēķināt sijas, kopnes, plakanus un telpiskus rāmjus un citas būvkonstrukcijas. Zīm. 8.1 attēlota plakana rāmja aprēķina shēma un slodzes. Šis rāmis tika projektēts reālai konstrukcijai Liepājā.

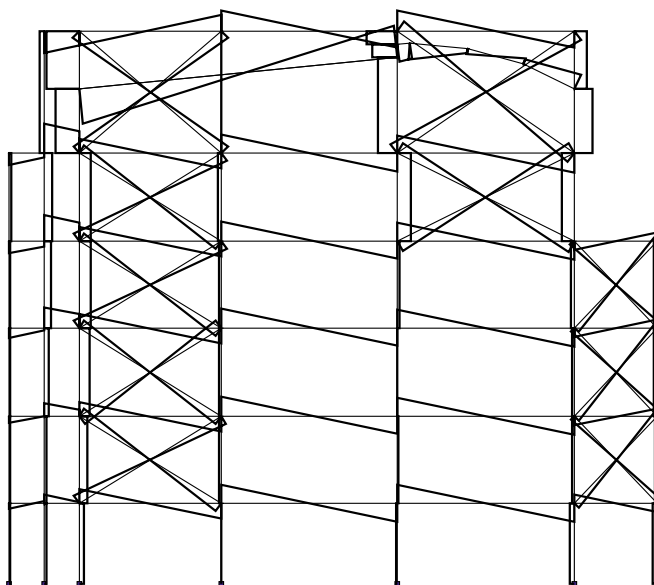


Zīmējums 8.1: Rāmja aprēķina shēma

Rāmja lieces momentu epīras attēlotas Zīm. 8.2. Kopā ar šķērsspēku un aksiālo spēku epīrām var veikt rāmja elementu šķēsgriezuma izmēru dimensiju noteikšanu, izejot no stiprības aprēķina. Spiestos stieņus ir jāpārbauda arī uz noturību. Ar LIRU var aprēķināt arī konstrukcijas vispārējo noturību.

### 8.2.2 Plātņu savienojuma aprēķins

Praksē bieži iznāk savienot divas plātnes. Tradicionālais savienojuma veids ir, izmantojot kniedi caurumā ar konstantu diametru. Tomēr tradicionālais



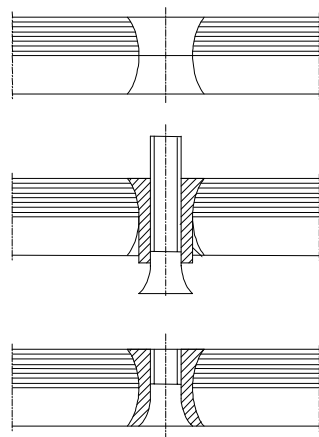
Zīmējums 8.2: Lieces momentu epīra

savienojums dažos gadījumos nenodrošina pietiekošu stingumu. Tāpēc aviācijas rūpniecības vajadzībām ir izstrādāta jauna savienojuma koncepcija (sk. Zīm. 8.3). Tiek savienotas divas plātnes: kompozīta un alumīnija. Caurums ir ar mainīgu diametru. Caurumā ievieto čaulu un tad ar skrūvi to deformē kamēr tā piekļaujas cauruma malai. Čaula un skrūve ir izgatavota no titāna sakausējuma.

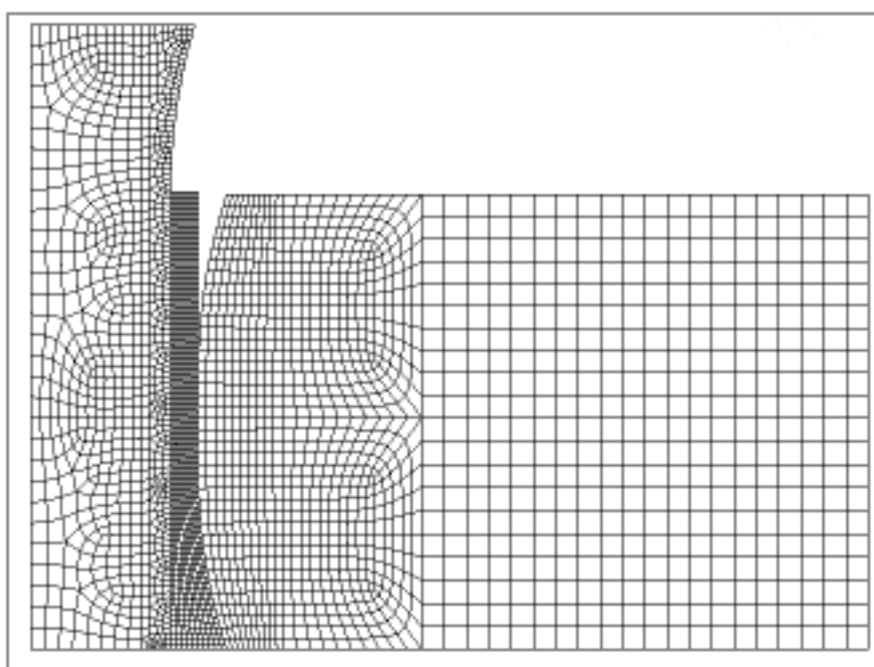
Uzdevums ir ar GEM aprakstīt čaulas deformēšanos, spriegumus tajā, kā arī kontaktpēkus savienojumu vietās. Tas ir divdimensiju asijsimetriskis uzdevums, kas tiek risināts ar programmu ANSYS. GE tīls ir parādīts Zīm. 8.4.

Uzdevums ir nelineārs, jo titāna sakausējuma deformēšanās tiek aprakstīta ar plastiskās tecēšanas teoriju, ievērojot Mizesa plastiskuma kritēriju un materiāla nostiprināšanos. Tāpat tiek ievērota berze starp kontaktvirsmām. Savienojuma deformētais stāvoklis ir parādīts Zīm. 8.5. Deformētā stāvoklī tika sarēķināti Mizesa spriegumi un novērtēta čaulas un skrūves stiprība. Tāpat tika novērtēti spriegumi kompozīta un alumīnija plātnēs.

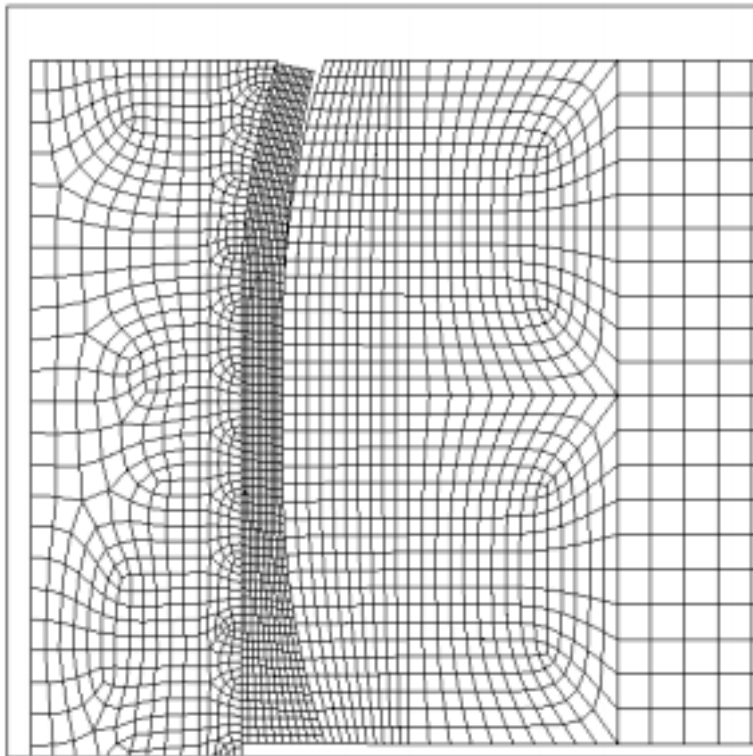
Uzdevuma analīze parādīja, ka šo jauno plātņu savienojuma konstrukciju var ieviest praksē.



Zīmējums 8.3: Plātņu savienojuma skice

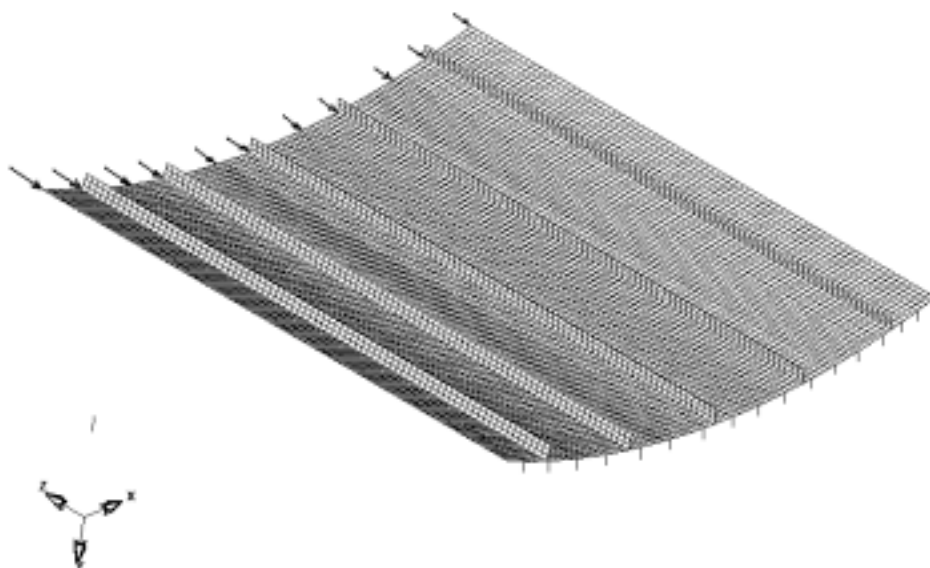


Zīmējums 8.4: Dalījums galīgos elementos

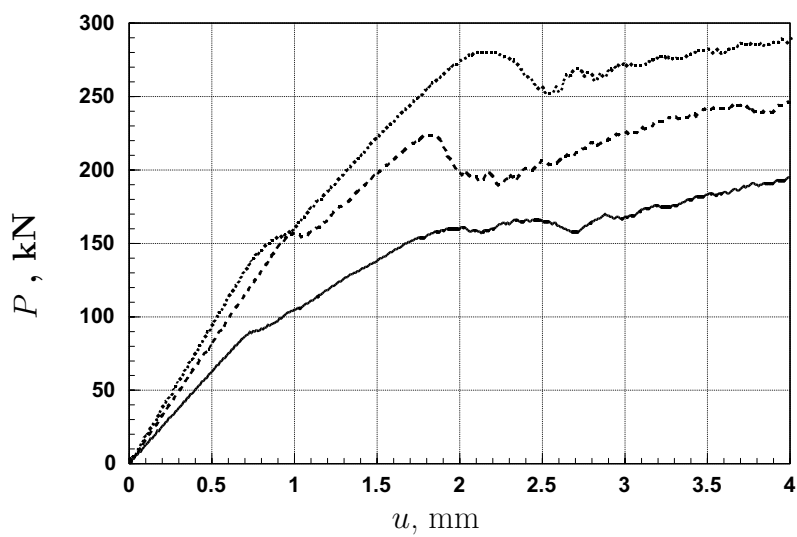


Zīmējums 8.5: Kniedes deformētais stāvoklis





Zīmējums 8.6: Ribota oglekļplasta čaula pie aksiāla spēka



Zīmējums 8.7: Aksiālā spēka-pārvietojuma līkne

### 8.2.3 Ribotas kompozīta čaulas noturība

Slāņaina kompozīta materiāla čaulas ir visvieglākās konstrukcijas ar ievērojamu nestspēju. Tās var izgatavot no stiklaplasta, oglekļplasta vai kāda cita polimēru kompozīta materiāla. Būvniecībā visbiežāk lieto stiklaplastus - gan cauruļvadu, gan rezervuāru izgatavošanā.

Stiklaplasta konstrukcijas nav pārāk dārgas, tāpēc tās visbiežāk lieto būvniecībā. Oglekļplasta čaulas ir ļoti dārgas, bet ar izcilām stiprības un stinguma īpašībām. Tās lieto aviācijas un kosmosa tehnikā. Kaut gan pēdējā laikā atsevišķos gadījumos tās lieto arī būvniecībā. Piemēram, dzelz-betona tiltu pastiprināšanā.

Aplūkosim oglekļplasta ribotas čaulas pie aksiāla spēka noturības aprēķinu, ievērojot pēckritiskās deformācijas. Aprēķins veikts ar programmu LS-DYNA. Čaulas dalījums galīgos elementos parādīts Zīm. 8.6.

Čaulas deformēšanās parādīta Zīm. 8.7, kur  $u$  ir aksiālais pārvietojums un  $P$  ir aksiālais spēks. Parādīti risinājumi trīs dažādi variantiem, kuri atšķiras ar kompozīta slāņu novietojumu. Redzam, ka čaula pēc noturības zaudēšanas pāriet uz pēckritisko stāvokli un var vēl papildus uzņemt slodzi. Pēc tam notiek otrā noturības zaudēšana, un čaula vairs nav spējīga uzņemt papildus slodzi.

Tātad ar komerciālām GEM programmām var atrisināt gan samērā vienkāršus standarta uzdevumus, gan risināt sarežģītus nelineārus uzdevumus.

# Literatūra

- [1] Lavendelis E., *Materiālu pretestība*, Zvaigzne, Rīga, 1986.
- [2] Rikards R., *Čaulu un plātņu aprēķini ar galīgo elementu metodi*, RPI izdevniecība, Rīga, 1982.
- [3] Hrenikoff, A., Solution of problems in elasticity by the frame work method, *Journal of Applied Mechanics*, **8**, 1941, 169–175.
- [4] Courant, R., Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **49**, 1943, 1–23.
- [5] Argyris, J. H., Energy theorems and structural analysis, *Aircraft Engineering*, **26**(Part 1), Oct.–Nov., 1954, **27**(Part 2), Feb.–May, 1955.
- [6] Turner, M. J., Clough, R. W., Martin, H. C. and Topp, L. J., Stiffness and deflection analysis of complex structures, *Journal of aeronautical science*, **23**(9), 1956, 805–824.
- [7] Clough, R. W., The finite element method in plane stress analysis, *Proc. American Society of Civil Engineers, 2<sup>nd</sup> Conference on Electronic Computation, Pittsburg, Pennsylvania*, **23**, 1960, 345–378.
- [8] Zienkiewicz, O. C. and Cheung, Y. K., *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*, McGraw-Hill, London, 1967.
- [9] Rayleigh, Lord (J. W. Strutt), Some general theorems relating to vibrations. *Proc. London Math. Soc.*, **4**, 1873, 357–368.
- [10] Ritz, W., Über eine Neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der Matematischen Physik. *J. Reine Angew. Math.*, **135**, 1909, 1–61.
- [11] Chandrupatla, T. R. & Belegundu, A. D., *Introduction to Finite Elements in Engineering*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1997.

- [12] Bathe K.-J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1982.
- [13] Zienkiewicz O. C. and Taylor, R. L., *The Finite Element Method. Vol.1. Basic Formulations and Linear Problems*, McGraw-Hill, London, 1989.
- [14] Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L., *The Finite Element Method. Vol. 2. Solid and Fluid Mechanics, Dynamics and Nonlinearity*, 4th edn, McGraw-Hill, London, 1991.
- [15] Washizu K., *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, Pergamon Press, Oxford, 1982.
- [16] Pilkey W. & Wunderlich W., *Mechanics of Structures. Variational and Computational Methods*, CRC Press, Boca Raton- Ann Arbor-London-Tokyo, 1994.