IEVADS ELASTĪBAS TEORIJĀ

Andris Čate un Andris Popovs

Rīgas Tehniskā Universitāte

Materiālu un konstrukciju institūts

Rīga, 2008

Saturs

1. Matemātiskie pamatjēdzieni. 5

1.1. Tenzori un nepārtrauktas vides mehānika. 5

1.2. Galvenais tenzors. *Cartesian* tenzors. Tenzora pakāpe. 5

1.3. Vektori un skalāri lielumi. 6

1.4. Vektoru saskaitīšana. Vektora A reizināšana ar skalāru. 7

1.5. Vektoru krustošanās rezultāts. 8

1.6. Diādes. 10

1.7. Koordinātu sistēmas. Bāzes vektori. Triādes vienības vektors. 12

1.8. Koordinātu transformācija. Galvenais tenzors. 16

1.9. Taisnleņķa koordinātu sistēmas tenzora transformācijas likums. Kronekera simbols. Ortogonalitātes nosacījums. 18

1.10. Tenzoru laukums. Tenzoru atvasinājums. 21

1.11. Līnijas integrāls. Stoks'a teorēma. 23

2. Spriegumu analīze. 25

2.1. Materiāla nepārtrauktības jēdziens. 25

2.2. Homogenitāte. Izotropija. Masas blīvums. 25

2.3. Ķermeņa spēks. Virsmas spēks. 26

2.4. Košī sprieguma jēdziens. Sprieguma vektors. 27

2.5. Punkta spriegumstāvoklis. Sprieguma tenzors. 28

2.6. Sakarības starp spriegumu tenzoru un spriegumu vektoru. 31

2.7. Spēku un momentu līdzsvars. 33

2.8. Sprieguma transformācijas likums. 35

2.9. Galvenie spriegumi. Spriegumu invarianti. 36

3. Deformācijas un pārvietojumi. 39

3.1. Daļiņas (partikulas) un punkti. 39

3.2. Nepārtrauktas vides konfigurācija. Deformācijas jēdziens. 39
3.3. Stāvokļa vektors. Pārvietojumu vektors. 39
3.4. Deformāciju apraksti ar Lagranža un Eilera vienādojumiem. 42
3.5. Deformāciju gradienti. Pārvietojumu gradienti. 44
3.6. Deformāciju tenzori. 45

4. Lineārā elastība. 48

4.1. Vispārīgais Huka likums. Deformācijas enerģijas funkcija. 48
4.2. Izotropija. Anizotropija. Elastības simetrija. 51
4.3. Izotropa vide. Elastības konstantes. 55
4.4. Elastostatikas problēmas. Elastodinamikas problēmas. 56
4.5. Superpozicijas teorēma. 58

5. Plastiskums. 59

5.1. Pamatjēdzieni un definīcijas. 59
5.2. Materiāla idealizēti plastiskā izturēšanās. 62
5.3. Materiāla tecēšanas nosacījumi. *Tresca* un *Mises* kritēriji. 63
5.4. Sprieguma telpa. π - plakne. Tecēšanas virsma. 69
5.5. Materiāla izturēšanās pēc tecēšanas sākšanās. Izotropiskā un kinemātiskā stiprināšana. 71
5.6. Plastiskuma sprieguma–deformāciju vienādojums. Plastiskuma potenciālā teorija. 74
5.7. Ekvivalentais spriegums. Ekvivalentais plastiskās deformācijas pieaugums. 75
5.8. Plastiskuma darbs. Deformāciju–stiprināšanas hipotēzes. 77
5.9. Vispārējās deformācijas teorija. 79
5.10. Elastoplastiskās problēmas. 80

6. Lineāri viskozā elastība. 82

6.1. Lineāri viskozās attiecības. 82

6.2. Vienkārši viskozi elastīgi modeļi. 82

6.3. Vispārinātais modelis. Lineārs diferenciāloperatoru vienādojums. 85

6.4. Šļūde un relaksācija. 87

6.5. Šļūdes funkcija. Relaksācijas funkcija. Pārmantošanas integrāls. 90

6.6. Saliktais modulis un padevīgums (piekāpība). 94

6.7. Trīs dimensiju teorija. 96

6.8. Viskozās elastības sprieguma analīze. Atbilstības princips. 98

Izmantotā literatūra. 101

1. Matemātiskie pamatjēdzieni.

1.1. Tenzori un nepārtrauktas vides mehānika.

(tensors and continuum mechanics)

Nepārtrauktas vides mehānikā apskata fizikālos lielumus, kuri ir neatkarīgi no pielietotās koordinātu sistēmas. Matemātiski šie lielumi tiek pārstāvēti ar tenzoriem.

No matemātiskā viedokļa tenzors ir neatkarīgs no jebkuras koordinātu sistēmas. Tomēr īpašās koordinātu sistēmās atsevišķi lielumi tiek apzīmēti kā komponentes. No tenzoru komponentēm vienā koordinātu sistēmā var noteikt komponentes jebkurā citā sistēmā.

Nepārtrauktas vides fizikālie likumi tiek izteikti ar tenzoru vienādojumiem. Tāpēc ka tenzoru pārveidojumi ir lineāri un homogēni, t.i. vienveidīgi vienādojumi, tie ir derīgi kā vienā tā arī citā koordinātu sistēmā. Šo tenzoru vienādojumu neatkarība (invariance) pie koordinātu transformācijas ir viens no galvenajiem iemesliem tenzoru pielietošanai nepārtrauktas vides mehānikā.

1.2. Galvenais tenzors. *Cartesian* tenzors. Tenzora pakāpe.

(General tensors. Cartesian tensors. Tensor rank)

Rīkojoties ar parastām koordinātu transformācijām starp patvaļīgām līklīniju koordinātu sistēmām, tenzori tiek definēti kā galvenie tenzori (*general tensors*). Kad tiek veikta transformācija no vienas homogēnas, jeb vienveidīgas, koordinātu sistēmas uz citu, tenzors tiek saukts par *Cartesian* tenzoru.

Tenzori tiek klasificēti pēc to pakāpes (*rank or order*) saskaņā ar to pārveidošanas (t.i. transformācijas) likumu izvēlēto formu. Tāda paša klasifikācija parādās arī komponenšu skaitliskos apzīmējumos pie tenzoru apzīmēšanas n–dimensiju telpā. Trīsdimensiju Eiklida telpā kā parastā fizikālā telpā tenzora komponenšu numuri ir 3^N, šeit N ir tenzora pakāpe. Atbilstoši, nulles pakāpes tenzoram trīsdimensiju telpas koordinātu sistēmā ir viena komponente. Nulles pakāpes tenzoru sauc par skalāru (*scalars*). Pirmās pakāpes

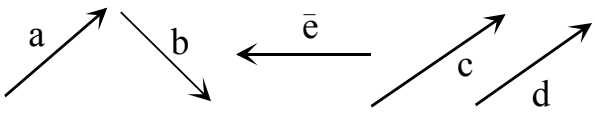
tenzoram ir trīs komponentes koordinašu sistēmā fizikālā telpā un to sauc par vektoru (*vectors*). Kvantitatīvā īpašība gan pēc lieluma gan virziena tiek attēlota ar vektoru. Otrās pakāpes tenzors atbilst diādei (*dyadics*). Nepārtrauktas vides mehānikas atsevišķi svarīgi lielumi tiek attēloti kā otrās pakāpes tenzori. Vēl augstākas pakāpes tenzorus sauc par triādēm (*triadics*), jeb trešās pakāpes tenzori, un tetraeds (*tetradics*), jeb ceturtās pakāpes tenzors.

1.3. Vektori un skalāri lielumi.

Noteiktos apstākļos fizikālos lielumus, tādus kā spēks un ātrums, kuri gan pēc lieluma gan virziena tiek attēloti trīsdimensiju telpā ar taisnes nogriezni, var saskaitīt pēc paralelograma likuma. Taisnes nogrieznis ar savu garumu un uzrādīto virzienu attēlo pirmās pakāpes tenzoru un tiek saukts par vektoru, kura garums ir proporcionāls vektora lielumam. Līdzīgam vektoram ir tāds pats virziens un līdzīgs garums.

Vienības vektors (*unit vector*) ir vektors, kura garums ir viena garuma vienība. Nulles vektoram (*null or zero vector*) ir nulles garums un nenoteikts virziens. Negatīvam vektoram ir tāds pats garums, bet pretējs virziens.

Tādi fizikāli lielumi kā masa un enerģija, kuru lielumu pārstāv tikai nulles pakāpes tenzori, ir skalāri. Simboliskos, jeb Gibsa apzīmējumos vektori parasti tiek apzīmēti ar "trekniem" burtiem (*bold-faced*), piemēram **a,b** utt. Skalāros lielumus norāda ar *italic letters: a,b* utt.. Vienības vektoru atšķirīgā pazīme ir svītriņa virs "*bold-faced*" burta. Zīm.1.1 parādīti vektori **a** un **b** ar vienības vektoru $\bar{e}$ un divi līdzīgi vektori **c** un **d**. Vektora **a** lielums tiek rakstīts kā a , vai arī, ja grib sevišķi uzsvērt, tad vektora lieluma apzīmējumā pielieto vertikālas svītras |**a**|.



Zīmējums 1.1. Piemēri vektoru apzīmējumiem.

1.4. Vektoru saskaitīšana. Vektora A reizināšana ar skalāru.

(*Vector addition. Multiplication of **A** vector by A scalar*)

Vektoru saskaitīšanu veic pēc paralelograma likuma, saskaņā ar kuru divu vektoru summa ir tāda paralelograma diagonāle, kura malas veido šie vektori. Šis vektoru saskaitīšanas likums ir ekvivalents trīsstūra nosacījumam (*triangle rule*), kurš definē divu vektoru summu kā rezultējošo vektoru, kuru iegūst viena vektora galā (pie virziena bultiņas) pievienojot otro vektoru pēc tā virziena un lieluma. Grafiskais attēlojums divu vektoru **a** un **b** saskaitīšanai pēc paralelograma likuma ir parādīts zīm.1.2(a). Algebraiski saskaitīšanas process tiek izteikts ar vektoru vienādojumu:

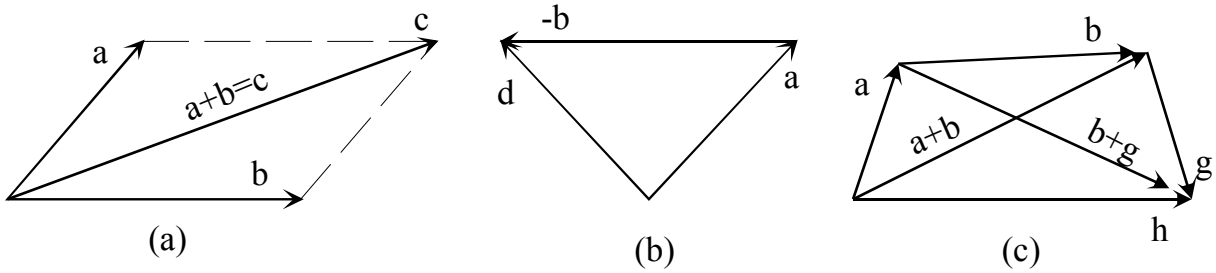
$$a+b=b+a=c \tag{1.1}$$

Vektoru atņemšanu veic ar negatīva vektora pieskaitīšanu, zīm.1.2(b):

$$a-b=-b+a=d \tag{1.2}$$

Vektoru saskaitīšanas un atņemšanas darbības ir komutatīvas un asociatīvas (*commutative and associative),* zīm.1.2(c), kuru atbilstošie vienādojumi ir:

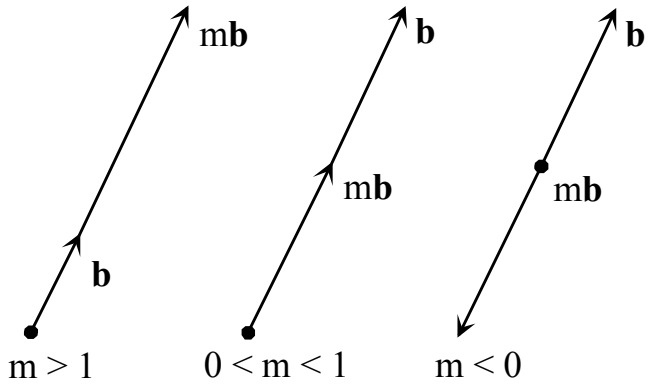
$$(a+b)+g=a+(b+g)=h \tag{1.3}$$



Zīmējums 1.2. Vektoru saskaitīšanas grafiskais attēlojums.

Vektoru reizinājums ar skalāru lielumu ir jauns vektors ar tādu pašu virzienu, bet atšķirīgu no sākotnējā garumu. Izņēmums ir reizināšana ar nulli,

kad iegūst nulles vektoru, un reizināšana ar vienības vektoru, kurš nedod vektora izmaiņas. Trīs rezultātu varianti pie vektora **b** reizināšanas ar skalāru *m* ir parādīti zīm.1.3 atkarībā no *m* skaitliskās vērtības.



Zīmējums 1.3. Vektora reizināšana ar skalāru lielumu.

Vektora reizināšanas darbības ar skalāru ir asociatīvas un distributīvas (*associative and distributive*):

$$m(nb)=(mn)b=n(mb) \tag{1.4}$$

$$(m+n)b=(n+m)b=mb+nb \tag{1.5}$$

$$m(a+b)=m(b+a)=ma+mb \tag{1.6}$$

Svarīgs gadījums vektoru reizināšanā ir tā lieluma mijiedarbība, rezultātā iegūst vienības vektoru ar tādu pašu virzienu kā sākotnējam vektoram. Šī sakarība tiek izteikta ar vienādojumu:

$$\bar{b}=b/b \quad \text{(Bold/Italic)} \tag{1.7}$$

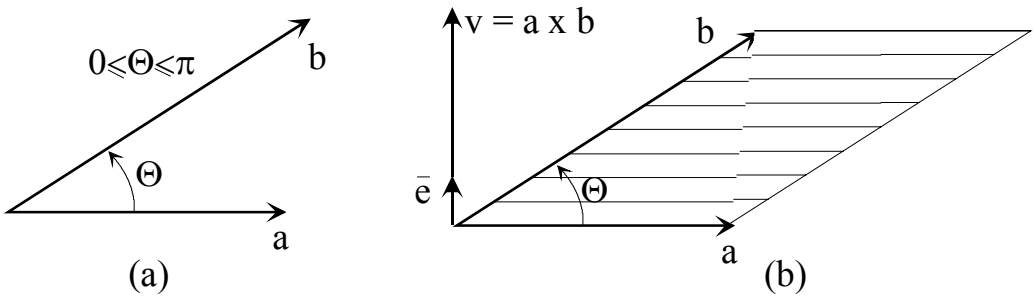
1.5. Vektoru krustošanās rezultāts.

(Dot and cross products of vektors)

Divu vektoru **a** un **b** reizinājums ir skalārs lielums (*dot or scalar product*):

$$\lambda=a\cdot b=b\cdot a=ab\cos\theta \tag{1.8}$$

Šeit θ ir šaurais leņķis starp diviem vektoriem, skat. zīm.1.4(a).



Zīmējums 1.4. Divu vektoru reizināšanas grafiskais attēlojums.

Divu vektoru **a** un **b** reizinājums ir jauns vektors **v**, kuru nosaka:

$$v=a\times b=-b\times a=(ab\sin\theta)\bar{e} \qquad (1.9)$$

Šeit θ ir leņķis starp **a** un **b**, mazāks par 180 grādiem, $\bar{e}$ ir vienības vektors, perpendikulārs plaknei, kuru veido **a** un **b** un virzīts pēc labās rokas likuma, griežot vektoru **a** uz **b** caur leņķi θ . Vektora **v** lielums ir paralelograma laukums, kuru veido vektori **a** un **b** kā malas, skat. zīm.1.4(b). Krustošanās rezultāts nav komutatīvs.

Trīskāršējs skalārs rezultāts *(scalar triple product)* ir rezultāts no diviem vektoriem, viens no kuriem jau ir krustošanās rezultāts (*cross product*):

$$a\cdot(b\times c)=(a\times b)\cdot c=a\cdot b\times c=\lambda \qquad (1.10)$$

Dažreiz šo rezultātu apzīmē [**abc**] un sauc par *box product*.

Lielums λ ir vienāds ar paralēlskaldņa tilpumu, kura malas veido vektori **a,b,c**. Trīskāršējs vektora rezultāts (*vector triple product*) ir divu vektoru krustošanās rezultāts, viens no kuriem jau ir krustošanās rezultāts. Sekojošais vienādojums ir bieži sastopamā izteiksme, kura parāda **a** un **b**$\times$ **c** krustošanās rezultātu:

$$a\times(b\times c)=(a\cdot c)b-(a\cdot b)c=w \qquad (1.11)$$

1.6. Diādes.
(Dyads and dyadics)

Nenoteikts (t.i. nedefinēts) vektoru **a** un **b** rezultāts (*indeterminate vector product of **a** and **b***), kuru raksta **ab**, tiek saukts par diādi. Šis rezultāts nav komutatīvs, t.i. $ab \neq ba$. Diādes pirmo vektoru sauc par priekšteci (jeb iepriekšējo, agrāko)(*antecedent*), otro par sekojošo (*consequent*). *Dyadic* **D** atbilst otrās pakāpes tenzoram un vienmēr sastāv no diādu galīgas summas:

$$D = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_N b_N \qquad (1.12)$$

Simboliskos apzīmējumos *dyadics* tiek uzrādīts ar trekniem burtiem (*bold–faced sansserif).* Ja **D** izteiksmē (1.12) jebkurai diādei iepriekšējo un sekojošo vektoru apmaina vietām, tad tādu *diadics* sauc par lokāmu *dyadics (conjugate dyadics)* **D** un raksta:

$$D_c = b_1 a_1 + b_2 a_2 + ... + b_N a_N \qquad (1.13)$$

Ja **D** izteiksmē (1.12) jebkuru diādi aizstāj ar divu vektoru reizinājumu rezultāta punktu (*dot product of the two vectors*), tad iegūst skalāru lielumu (*scalar of the dyadic **D***):

$$D_s = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + ... + a_N \cdot b_N \qquad (1.14)$$

Ja **D** izteiksmē (1.12) jebkuru diādi aizstāj ar divu vektoru krustošanās rezultātu (*the cross product of the two vectors*), tad iegūst vektoru (*vector of the dyadic **D***):

$$D_V = a_1 \times b_1 + a_2 \times b_2 + ... + a_N \times b_N \qquad (1.15)$$

D_C, D_S, D_V ir neatkarīgi izteiksmes (1.12) varianti.

Neatkarīgu vektoru reizinājums atbilst distributātes likumam:

$$a(b+c) = ab + ac \qquad (1.16)$$

$$(a+b)c = ac + bc \qquad (1.17)$$

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd \tag{1.18}$$

un ja λ un μ ir skalāri lielumi, tad:

$$(\lambda+\mu)ab=\lambda ab+\mu ab \tag{1.19}$$

$$(\lambda a)b=a(\lambda b)=\lambda ab \tag{1.20}$$

Ja **v** ir vektors, tad rezultāts **v** D un D **v** attiecīgi ir vektori:

$$v\cdot D=(v\cdot a_1)b_1+(v\cdot a_2)b_2+...+(v\cdot a_N)b_N=u \tag{1.21}$$

$$D\cdot v=a_1(b_1\cdot v)+a_2(b_2\cdot v)+...+a_N(b_2\cdot v)=w \tag{1.22}$$

Izteiksmē (1.21) D sauc par otro reizinātāju (jeb koeficientu) (*post factor*), izteiksmē (1.22) par pirmo reizinātāju (jeb koeficientu) (*prefactor*). Divi *dyadics* D un E ir vienādi, ja:

$$v\cdot D=v\cdot E \quad \text{jeb} \quad D\cdot v=E\cdot v \tag{1.23}$$

Vienības *dyadic (unit dyadic)* jeb *idemfactor* **I** ir *dyadic*, kuru raksta sekojoši:

$$I=\bar{e}_1\bar{e}_1+\bar{e}_2\bar{e}_2+\bar{e}_3\bar{e}_3 \tag{1.24}$$

šeit $\bar{e}_1\bar{e}_2\bar{e}_3$ sastāda trīs dimensiju Euklida telpas ortonormālo bāzi. *Dyadic* **I** raksturojas ar īpašību:

$$I\cdot v=v\cdot I=v \tag{1.25}$$

priekš visiem vektoriem **v**.

Pamatjēdzienu paskaidrojums.

a) skalāri lielumi raksturojas ar vienu noteicošu lielumu (piemēram, temperatūra, tilpums) ir nulles pakāpes tenzori, noteicošie lielumi (jeb bāzes elementi) ir $=3^0$;

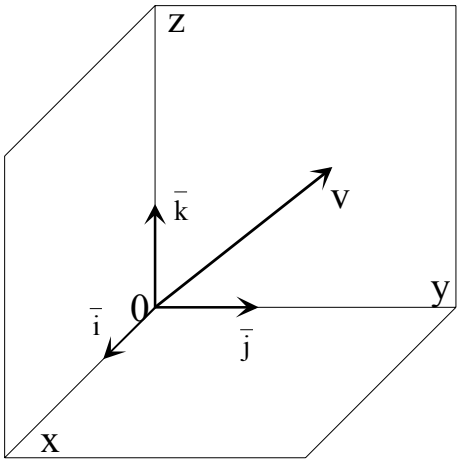
b) vektori raksturojas ar trīs noteicošiem lielumiem (piemēram, spēks, ātrums) ir pirmās pakāpes tenzori, noteicošie lielumi (jeb bāzes elementi) $=3^1$;

c) diādes raksturojas ar deviņiem noteicošiem lielumiem (piemēram, spriegumi, sašķobījumi) ir otrās pakāpes tenzori, noteicošie lielumi (jeb bāzes elementi) $=3^2$.

1.7. Koordinātu sistēmas. Bāzes vektori. Triādes vienības vektors.

(Coordinate systems. Base vectors. Unit vector triads).

Attiecībā pret izvēlēto koordinātu sistēmu vektors tiek noteikts ar vektora komponentēm šinī sistēmā. Koordinātu sistēmas izvēle ir patvaļīga. Norāde uz koordinātu sistēmas asīm dod vektora lieluma mērvienības un nosaka telpu, kurā ir noteikts vektora virziens. Taisnleņķa koordinātu sistēmā savstarpēji perpendikulārās asis ir 0xyz, skat. zīm.1.5.



Zīmējums 1.5. Vektors taisnleņķu koordinātu sistēmā.

Jebkurš vektors **v** šinī sistēmā tiek noteikts ar trīs, atšķirīgiem no nulles, vektoru kombināciju, šos vektorus sauc par pamatvektoriem (*base vectors*). Priekš pamatvektoriem **a,b,c** un vektoram **v** atbilstošiem skalāriem koeficientiem λ, μ, ν pastāv attiecība:

$$v = \lambda a + \mu b + \nu c \tag{1.26}$$

Bāzes vektori ir lineāri neatkarīgi, t.i. attiecība:

$$\lambda a + \mu b + \nu c = 0 \tag{1.27}$$

ja $\lambda=\mu=\nu=0$

Dotajā koordinātu sistēmā pamatvektori sastāda šīs sistēmas bāzi jeb pamatu.

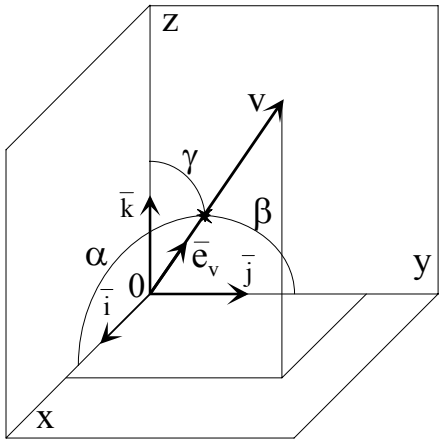
Bieži pamatvektoru izvēli nosaka ar vienības vektoriem $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ koordinātu asu virzienā, skat. zīm.1.5. Pamatvektori veido vienības vektoru triādi pēc labās rokas likuma (*constitute a right-handed unit vector triad*), priekš kuras ir spēkā sekojošas izteiksmes:

$$\bar{i}\times\bar{j}=\bar{k},\quad \bar{j}\times\bar{k}=\bar{i},\quad \bar{k}\times\bar{i}=\bar{j} \tag{1.28}$$

un $\bar{i}\cdot\bar{i}=\bar{j}\cdot\bar{j}=\bar{k}\cdot\bar{k}=1$

$$\bar{i}\cdot\bar{j}=\bar{j}\cdot\bar{k}=\bar{k}\cdot\bar{i}=0 \tag{1.29}$$

Visus šādus trīs vektorus kopā sauc par ortonormālo bāzi (*orthonormal basis*).



Zīmējums 1.6. Vektora attēlojums vienību triādes terminos.

Vienību triādes $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ terminos vektors **v** ir parādīts zīm.1.6:

$$v=v_x\bar{i}+v_y\bar{j}+v_z\bar{k} \tag{1.30}$$

šeit taisnleņķa koordinātu sistēmas komponentes ir:

$$v_x=v\cdot\bar{i}=v\cos\alpha$$

$$v_y = v \cdot \bar{j} = v \cos\beta$$

$$v_z = v \cdot \bar{k} = v \cos\gamma$$

Vienības vektors vektora **v** virzienā saskaņā ar (1.7) :

$$\bar{e}_v = \mathbf{v}/v = (\cos\alpha)\bar{i} + (\cos\beta)\bar{j} + (\cos\gamma)\bar{k} \qquad (1.31)$$

Tā kā **v** ir patvaļīgi izvēlēts, tam atbilstošajam vienas vienības vektoram ir virziena kosinuss (*direction cosines*) un komponentes taisnleņķa koordinātu sistēmā:

$$a \cdot b = (a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}) \cdot (b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}) = (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) \qquad (1.32)$$

Šiem pašiem vektoriem **a** un **b** krustošanās rezultāts (*cross product*):

$$a \times b = (a_y b_z - a_z b_y)\bar{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\bar{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\bar{k} \qquad (1.33)$$

Rezultāts noteicēja formā (*the determinant form*):

$$a \times b = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \qquad (1.34)$$

Šeit elementi atbilst koordinātu numuriem. Trīskārtējs skalārs reizinājums (*triple scalar product)* komponenšu formā tiek izteikts ar noteicēju (*determinant*):

$$[abc] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \qquad (1.35)$$

taisnleņķa koordinātu sistēmas komponenšu formā diādi **ab** var rakstīt:

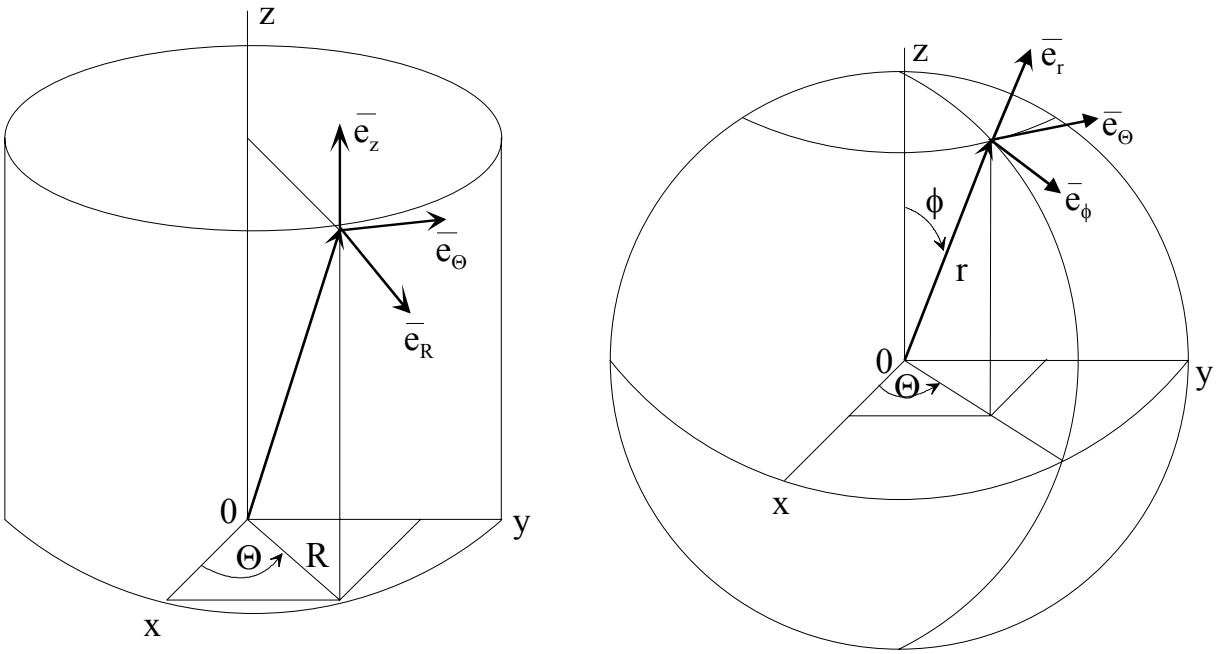
$$ab = (a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k})(b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}) = a_x b_x \bar{i}\bar{i} + a_x b_y \bar{i}\bar{j} + a_x b_z \bar{i}\bar{k} +$$

$$+ a_y b_x \bar{j}\bar{i} + a_y b_y \bar{j}\bar{j} + a_y b_z \bar{j}\bar{k} + a_z b_x \bar{k}\bar{i} + a_z b_y \bar{k}\bar{j} + a_z b_z \bar{k}\bar{k} \qquad (1.36)$$

Tā kā ir ietverti deviņi saskaitāmie, izteiksmi (1.36) sauc par diādes **ab** *nonion form (the nonion form of the dyads* ***ab****).* Ir iespējams izteikt vienu diādi šinī formā. *The nonion form* triādes $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ vienībās:

$$\mathbf{I}=\bar{i}\bar{i}+\bar{j}\bar{j}+\bar{k}\bar{k} \qquad (1.37)$$

Līklīniju koordinātu sistēmas (*curvilinear coordinate systems*) tādas kā cilindriskā (*cylindrical*) (R,θ,Z) un sfēriskā (*spherical*) (r,θ,ψ) sistēmas ir parādītas zīm.1.7.



(a) Cylindrical (b) Spherical

Zīmējums 1.7. Cilindriskā un sfēriskā koordinātu sistēmas.

Bāzes vektoru vienību triādes $(\bar{e}_R,\bar{e}_\theta,\bar{e}_Z)$ un $(\bar{e}_r,\bar{e}_\theta,\bar{e}_\psi)$ zīmējumos parādītas kā apvienotas ar šīm sistēmām. Tomēr pamatvektoriem šeit nav noteikts virziens un tādēļ tie parasti ir novietojuma jeb pozicijas funkcija.

1.8. Koordināšu transformācija. Galvenais tenzors.

(Coordinate transformations. General tensors).

Pieņemam, ka x^i pārstāv patvaļīgu sistēmu ar koordinātēm x^1, x^2, x^3 trīsdimensiju Euklida telpā, bet Θ^i pārstāv citu koordināšu sistēmu $\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3$ tanī pašā telpā. Šeit augšējie indeksi nav pakāpes rādītāji, bet "etiķetes" (*labels*). Koordināšu transformācijas vienādojums:

$$\Theta^i = \Theta^i\left(x^1, x^2, x^3\right) \tag{1.38}$$

t.i. dots punkts x^i - sistēmā ar koordinātēm $\left(x^1, x^2, x^3\right)$ un jānosaka šī paša punkta koordinātes $\left(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3\right)$ citā sistēmā Θ^i .

Funkcija Θ^i attiecībā uz mainīgiem (t.i. koordinātēm) ir nepārtraukta, viennozīmīga, diferencējama funkcija.

Determinantu

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Theta^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \Theta^1}{\partial x^2} & \frac{\partial \Theta^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \Theta^2}{\partial x^1} & \frac{\partial \Theta^2}{\partial x^2} & \frac{\partial \Theta^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \Theta^3}{\partial x^1} & \frac{\partial \Theta^3}{\partial x^2} & \frac{\partial \Theta^3}{\partial x^3} \end{vmatrix} \tag{1.39}$$

jeb kompaktā formā

$$J = \left| \frac{\partial \Theta^i}{\partial x^j} \right| \tag{1.40}$$

sauc par transformācijas Jakobiānu (*the Jacobian of the transformation*).

Izteiksme (1.38) apgrieztā veidā ir:

$$x^i = x^i\left(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3\right) \tag{1.41}$$

No (1.38), diferenciālvektors $d\Theta^i$ ir uzdots ar:

$$d\Theta^i = \frac{\partial \Theta^i}{\partial x^j} dx^j \tag{1.42}$$

Šī izteiksme ir prototips vienādojumam, kurš nosaka, jeb definē, tenzoru klasi, kuru sauc par kontravarianto vektoru (*contravariant vectors*). Vispārīgi, pēc lieluma b^i saistībā ar punktu P ir pirmās kārtas kontravariants tenzors (*contravariant tensor of order one*) pie koordinātu transformācijas, tā izteiksme ir:

$$b'^i = \frac{\partial \Theta^i}{\partial x^j} b^j \tag{1.43}$$

Izteiksmē (1.43) b' ir tenzora komponentes x^i koordinātu sistēmā, turpretim b'^i ir komponentes Θ^i. Vispārīgi, tenzoru teorijā kontravariantu tenzoru var pazīt pēc augšējiem indeksiem.

Bez kontravariantiem tenzoriem atšķirīgi tenzori ir kovariantie tenzori (*covariant tensors*). Kovariantie tenzori ir atpazīstami pēc apakšējiem indeksiem. Kovarianta tenzora prototips ir skalāras funkcijas parciālais atvasinājums no koordinātes. Tādā veidā, ja $\Phi = \Phi\left(x^1, x^2, x^3\right)$ ir funkcija, tad

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \Theta^i} = \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial \Theta^i} \tag{1.44}$$

Vispārīgi ņemot, pieņem, ka b^i pēc lieluma ir pirmās pakāpes kovarianta tenzora komponentes, kad to transformē saskaņā ar izteiksmi:

$$b'_i = \frac{\partial x^j}{\partial \Theta^i} b_j \qquad (1.45)$$

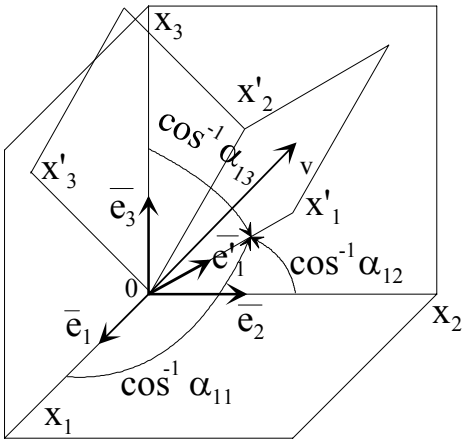
šeit b'_i ir kovariantes komponentes Θ^i sistēmā, b_i ir komponentes x^i sistēmā. Otrās pakāpes kovariants tenzors atbilst transformācijas likumam:

$$\mathrm{B}'_{ij} = \frac{\partial x^r}{\partial \Theta^i} \frac{\partial x^s}{\partial \Theta^j} \mathrm{B}_{rs} \qquad (1.46)$$

1.9. Taisnleņķa koordinātu sistēmas tenzora transformācijas likums. Kronekera simbols. Ortogonalitātes nosacījums.

(Transformation laws for cartesian tensors. The Kronecker delta. Ortogonality conditions).

Zīm. 1.8. Parādītas divu taisnleņķa koordinātu sistēmu asis $0x_1x_2x_3$ un $0x'_1x'_2x'_3$ ar kopīgu sākumpunktu 0.



Zīmējums 1.8. Divas taisnleņķu koordinātu sistēmas. Kopīgs sākumpunkts.

Sākotnējo, jeb primāro, sistēmu var iztēloties kā iegūtu no citas sistēmas ar asu pagriešanu vai kā asu atspoguļojumu vienā no koordinātu plaknēm, vai to kombināciju. Ja simbols a_{ij} apzīmē leņķa kosinusu starp primāro i un

neprimāro j koordināšu asīm, t.i. $a_{ij}=\cos\left(x'_i,x_j\right)$, tad individuālo asu orientāciju ikvienā sistēmā var noteikt pēc sekojošas tabulas:

	x_1	x_2	x_3
x'_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
x'_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
x'_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}

vai arī ar transformācijas tenzoru

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

No a_{ij} definīcijas vienības vektors $\bar{e}_1$ gar x'_1 asi tiek noteikts saskaņā ar izteiksmi (1.31) un summējot iegūst:

$$\bar{e}_1=a_{11}\bar{e}_1+a_{12}\bar{e}_2+a_{13}\bar{e}_3=a_{ij}\bar{e}_j \qquad (1.47)$$

Vispārinot šo vienādojumu iegūst patvaļīgu bāzes vektoru $\bar{e}'_i$:

$$\bar{e}'_i=a_{ij}\bar{e}_j \qquad (1.48)$$

Vektora **v** komponentes ir parādītas zīm.1.8., izteiktas neprimārā sistēmā ar vienādojumu:

$$\mathbf{v}=v_j\bar{e}_j \qquad (1.49)$$

un primārā (sākotnējā) sistēmā:

$$\mathbf{v}=v'_i\bar{e}'_i \qquad (1.50)$$

Aizvietojot $\bar{e}'_i$ izteiksmē (1.50) ar tā ekvivalento formu (1.48) iegūst rezultātu:

$$\mathbf{V}=v'_i a_{ij} \bar{e}_j \tag{1.51}$$

Pielīdzinot (1.51) ar (1.50) redzams, ka vektoru komponentes primārā un neprimārā sistēmās ir saistītas ar izteiksmi:

$$v_j=a_{ij}v'_i \tag{1.52}$$

Izteiksme (1.52) ir transformācijas likums (*transformation laws*) pirmās pakāpes taisnleņķu koordinātu sistēmas tenzoram un ir pirmās pakāpes transformācijas tenzora galvenā forma, izteikta tāpat kā (1.45) un (1.43). Samainot vietām primāros un neprimāros vektorus, no (1.52) iegūst pretējo, t.i. apgriezto:

$$v'_i=a_{ij}v_j \tag{1.53}$$

Atbilstoši izvēloties indeksus (1.53) un (1.52) var kombinēt rezultātus vienādojumam:

$$v_j=a_{ij}a_{ik}v_k \tag{1.54}$$

Tā kā vektors **v** ir brīvi izvēlēts, izteiksmi (1.54) var novest (reducēt) uz identitāti $v_j=v_j$. Tāpēc koeficients $a_{ij}a_{ik}$, kura vērtība ir atkarīga no indeksiem j un k , var būt vienāds ar 1 vai 0, atkarībā no tā, vai j un k skaitliskās vērtības ir vienādas vai atšķirīgas.

Kronekera simbols (*the Kronecker delta*) tiek definēts sekojoši:

$$\delta_{ij}=1 \quad pie \quad i=j$$

$$\delta_{ij}=0 \quad pie \quad i\neq j \tag{1.55}$$

un attēlo lielumu, tādu kā $a_{ij}a_{ik}$.

Pielietojot Kronekera simbolu koeficientu nosacījumu izteiksmē (1.54) var rakstīt:

$$a_{ij}a_{ik}=\delta_{jk} \tag{1.56}$$

vai arī $$a_{ij}a_{kj}=\delta_{ik} \tag{1.57}$$

Paplašinātā formā (1.56) pastāv deviņi vienādojumi virzienu kosinusu a_{ij} ortogonalitātes vai ortonormalitātes nosacījumiem (*orthogonality or orthonormality conditions*).

Lineārā transformācija, tāda kā (1.52) vai (1.53), kuras koeficienti atbilst (1.56) un (1.57) ir iepriekš minētā ortogonālā transformācija.

Kronekera simbols ir agrāk nosauktais aizstāšanas operators (*substitution operators*), piemēram:

$$\delta_{ij}b_j=\delta_{i1}b_1+\delta_{i2}b_2+\delta_{i3}b_3=b_i \tag{1.58}$$

un arī $$\delta_{ij}F_{ik}=\delta_{1j}F_{1k}+\delta_{2j}F_{2k}+\delta_{3j}F_{3k}=F_{jk} \tag{1.59}$$

1.10. Tenzoru laukums. Tenzoru atvasinājums.

(Tensor fields. Derivate of tensors).

Par tenzoru laukumu sauc tenzoru $\mathrm{T}(x,t)$ no jebkura pāra (x,t), kur pozīcijas vektors mainās telpas mazā apgabalā un t mainās mazā laika intervālā. Tenzora laukums ir nepārtraukts, jeb diferencējams, ja $\mathrm{T}(x,t)$ komponentes ir nepārtrauktas, jeb diferencējamas, funkcijas no x un t. Ja komponentes ir funkcijas tikai no x, tad tenzora laukumu sauc par stingru, vienmērīgu (*steady*).

Taisnleņķu koordināšu sistēmā, kurā brīvi izvēlēta punkta pozicijas vektors ir:

$$x=x_i\bar{e}_i \tag{1.60}$$

tenzoru laukums simbolu apzīmējumos ir sekojošs:

(a) skalārs laukums $\Phi=\Phi(x_i,t)$ (1.61)

(b) vektoru laukums $v_i=v_i(x,t)$ (1.62)

(c) otrās pakāpes tenzoru laukums $\mathrm{T}_{ij}=\mathrm{T}_{ij}(x,t)$ (1.63)

Tenzoru komponenšu koordināšu diferencēšana sakarā ar x_i tiek izteikta ar diferenciālo operatoru $\partial/\partial x_i$, vai arī īsāk indeksu formā ar ∂_i, norādot uz pirmās pakāpes tenzora operatoru. Simbolu apzīmējumos atbilstošais simbols ir tā saucamais diferencālais vektoru operators ∇ (*differencial vector operator*), izrunā ar vārdu "*del*" un raksta sekojoši:

$$\nabla=\bar{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}=\bar{e}_i\partial_i \tag{1.64}$$

Parciālā diferencēšana ar mainīgo x_i tiek attēlota ar apakšējiem indeksiem un komatu (*the comma – subscript convention*), kā redzams sekojošos piemēros:

(a) $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_i}=\Phi_{,i}$ (d) $\dfrac{\partial^2 v_i}{\partial x_j\partial x_k}=v_{i,jk}$

(b) $\dfrac{\partial v_i}{\partial x_i}=v_{i,i}$ (e) $\dfrac{\partial \mathrm{T}_{ij}}{\partial x_k}=\mathrm{T}_{ij,k}$

(c) $\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}=v_{i,j}$ (f) $\dfrac{\partial^2 \mathrm{T}_{ij}}{\partial x_k\partial x_m}=\mathrm{T}_{ij,km}$

Šajos piemēros redzams, ka operators ∂_i uzrāda tenzoru par vienu pakāpi augstāku, ja i paliek kā brīvs indekss (piemēri (a) un (c)) un tenzors ir par vienu pakāpi zemāks, ja i ir fiktīvs indekss (piemērs (b)) atvasinājumā.

Vairāki svarīgi diferenciālie operatori bieži tiek izteikti sekojošā veidā:

$$grad\quad \Phi=\nabla\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\bar{e}_i \qquad \text{vai arī} \qquad \partial_i\Phi=\Phi_{,i} \tag{1.65}$$

$$div\quad v=\nabla\cdot v \qquad \text{vai arī} \qquad \partial_i v_i=v_{i,i} \tag{1.66}$$

$$curl \quad v=\nabla\times v \qquad \text{vai arī} \qquad \varepsilon_{ijk}\partial_j v_k=\varepsilon_{ijk}v_{k,j} \qquad (1.67)$$

$$\nabla^2\Phi=\nabla\cdot\nabla_\Phi \qquad \text{vai arī} \qquad \partial_{ij}\Phi=\Phi_{,ii} \qquad (1.67)$$

1.11. Līnijas integrāls. Stoks'a teorēma.

(Line integrals. Stokes theorem).

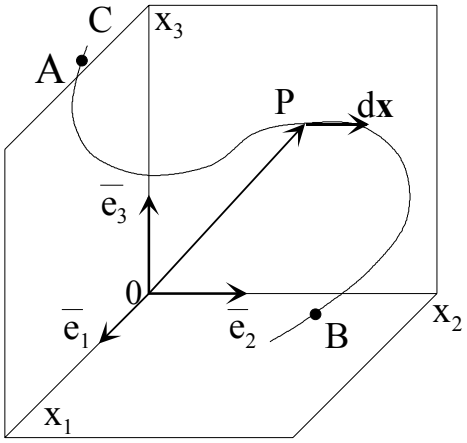
Dotajā telpas apgabalā pozicijas (jeb vietas) vektora funkcija $F=F(x)$ tiek definēta kā brīvi izvēlēts punkts uz gludas līknes, skat. zīm.1.9. Ja brīvi izvēlētas līknes punktā P tangenciālais vektors (*differential tangent vector*) ir dx , tad integrālu:

$$\int_C F\cdot dx \equiv \int_{x_A}^{x_B} F\cdot dx \qquad (1.69)$$

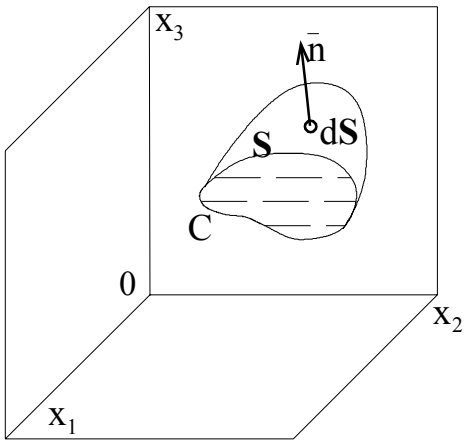
gar līkni no A līdz B sauc par līnijas integrālu (*line integral*) no F gar C .

Indeksu apzīmējumos šo izteiksmi (1.69) raksta:

$$\int_C F_i dx_i = \int_{(x_i)_A}^{(x_i)_B} F_i dx_i \qquad (1.70)$$



Zīmējums 1.9. Līnijas integrāls uz gludas līknes.



Zīmējums 1.10. Līnijas integrāls ap noslēgtu līkni.

Stoks'a teorēma saka, ka līnijas integrālu F ap noslēgtu līkni C (skat. zīm.1.10) iespējams izteikt no integrāla pa virsmu S , kurai C ir robeža:

$$\oint_C F \cdot dx = \int_S \overline{n} \cdot (\nabla \times F) dS \qquad (1.71)$$

šeit $\overline{n}$ ir vienības normāle pozitīvā virzienā no S , un dS ir mazs virsmas elements, skat. zīm.1.10. Indeksu apzīmējumos izteiksmi (1.71) var rakstīt:

$$\oint_C F_i dx_i = \int_S n_i \varepsilon_{ijk} F_{k,j} dS \qquad (1.72)$$

2. Spriegumu analīze.

2.1. Materiāla nepārtrauktības jēdziens.
(The continuum concept)

Materiālu molekulārā struktūra ir vispāratzīta. Tomēr materiālu īpašību sīka izpēte rāda, ka atsevišķas molekulas ir piemaisījumi no cita materiāla, bet neskatoties uz to, par svarīgām uzskata materiāla īpašības kopumā. Šādos gadījumos makroskopisko īpašību ievērošana ir parasts izskaidrojums neviendabīgā molekulārā sastāva ignorēšanai, pieņem, ka materiāla sadalījums pa tilpumu viscaur ir nepārtraukts un telpa (tilpums) ir pilnīgi piepildīta. Šis materiāla nepārtrauktības jēdziens (*continuum concept*) ir nepārtrauktas vides mehānikas fundamentāls postulāts. Robežās, kurās ir spēkā nepārtrauktības pieņēmums, šis jēdziens nodrošina noteikumus cietu ķermeņu, šķidrumu un gāzes īpašību līdzīgu izpēti.

2.2. Homogenitāte. Izotropija. Masas blīvums.
(Homogeneity. Isotropy. Mass-density)

Homogēnam materiālam visos tā punktos ir vienādas īpašības. Materiālu sauc par izotropu, ja tā īpašības visos virzienos ir vienādas un tādas pašas, kā atsevišķos punktos. Materiālu sauc par anizotropu, ja īpašības ir atkarīgas no izvēlētās vietas.

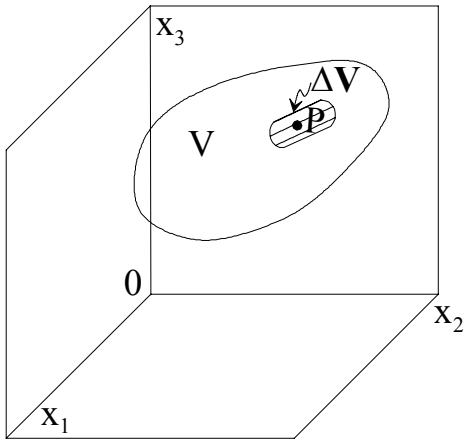
Masas blīvuma jēdziens ir radies no masas – tilpuma proporcionalitātes koeficienta, apskatot tuvāko apgabalu ap nepārtrauktas vides brīvi izvēlētu punktu. Zīm.2.1 maza tilpuma elementa ΔV masa tiek apzīmēta ar ΔM . Materiāla robežās ΔV vidējais blīvums (*average density*) tiek noteikts sekojoši:

$$\rho_{(av)}=\frac{\Delta M}{\Delta V} \qquad (2.1)$$

Blīvuma izteiksmi punktā P tilpuma elementa ΔV iekšpusē matemātiski raksta:

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta V} = \frac{dM}{dV} \tag{2.2}$$

Masas blīvums ρ ir skalārs lielums.



Zīmējums 2.1. Masas blīvuma jēdziena attēlojums.

2.3. Ķermeņa spēks. Virsmas spēks.

(Body forces. Surface forces)

Spēks ir vektoriāls lielums, kas vislabāk attēlo tādu jēdzienu kā spriegumu (piepūli). Tādu spēku, kas iedarbojas uz dotās vides tilpuma visiem elementiem (t.i. sastāvdaļām), sauc par ķermeņa spēku (*body forces*). Tam piemēri ir gravitācijas (smaguma) spēks un inerces spēks. Šo spēku apzīmē ar simbolu b_i (spēks, attiecināts uz masas vienību), vai arī p_i (spēks, attiecināts uz tilpuma vienību). Šis spēks ar blīvumu ir saistīts saskaņā ar izteiksmi:

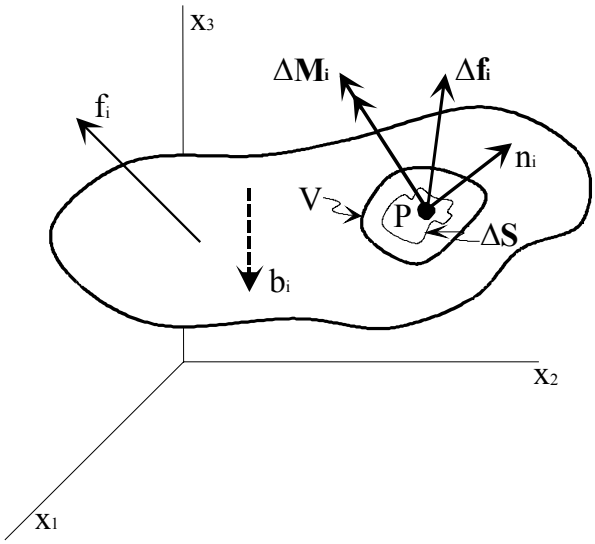
$$\rho b_i = p_i \tag{2.3}$$

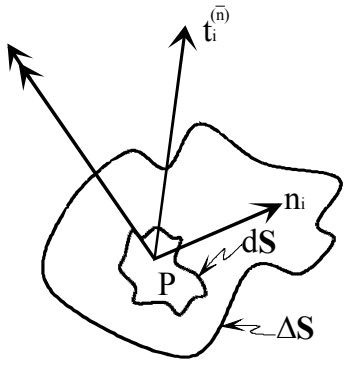
Tādu spēku, kas iedarbojas uz virsmas elementu vai arī uz nepārtrauktas vides iespējamo, patvaļīgi pieņemto iekšējās virsmas daļu, sauc par virsmas spēku (*surface force*). To apzīmē kā f_i (spēks, attiecināts uz laukuma vienību). Kontakta spēks pie ķermeņu saskaršanās arī ir virsmas spēks.

2.4. Košī sprieguma jēdziens. Sprieguma vektors.

(Cauchy stress principle. The stress vector)

Nepārtraukts materiāls telpā aizņem apgabalu R un ir pakļauts virsmas spēku f_i un ķermeņa spēku b_i iedarbībai (zīm. 2.2).





Zīmējums 2.2. Spēks un moments. Zīmējums 2.3. Sprieguma vektors.

Tā kā spēka darbības rezultātā sākas vides pārnešana, pārvade no vides vienas vietas uz otru, tad materiāls tilpumā V , kas ir norobežots ar virsmu S , savstarpēji iedarbojas ar materiālu, kas ir ārpus šī tilpuma. n_i ir virsmas S maza elementa ΔS punktā P uz ārpusi vērsta normāle, Δf_i ir pa ΔS rezultējošais spēks, kas iedarbojas uz materiālu tā robežās V .

Izkliedētā spēka daļas lielums Δf_i ir atkarīgs no ΔS un n_i izvēles. Spēka sadalījums pa ΔS ne vienmēr ir vienmērīgs. Vispārīgā gadījumā bez spēka var būt vēl moments pret punktu P , kā tas redzams zīm.2.2, vektori Δf_i un ΔM_i .

Vidējais spēks, attiecināts uz laukuma vienību ΔS, tiek rakstīts kā $\Delta f_i / \Delta S$. Košī sprieguma jēdziens (*Cauchy stress principle*) apgalvo, ka šī proporcija tiecas uz robežas definīciju df_i / dS, ja ΔS tuvojas nullei punktā P un tanī pašā laikā moments no Δf_i attiecībā pret punktu P izzūd. Rezultāta vektors df_i / dS (spēks uz laukuma vienību) tiek saukts par sprieguma vektoru (*stress vector*) $t_i^{(\bar{n})}$, skat zīm.2.3. Ja moments pret punktu P nav izzudis iepriekš aprakstītā procesā, tad pāra sprieguma vektors (*couple-stress vector*) tiek noteikts, jeb definēts attiecībā pret punktu, skat zīm.2.3.

Sprieguma vektoru matemātiski definē sekojošā veidā:

$$t_i^{(\bar{n})} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta f_i}{\Delta S} = \frac{df_i}{dS} \tag{2.4}$$

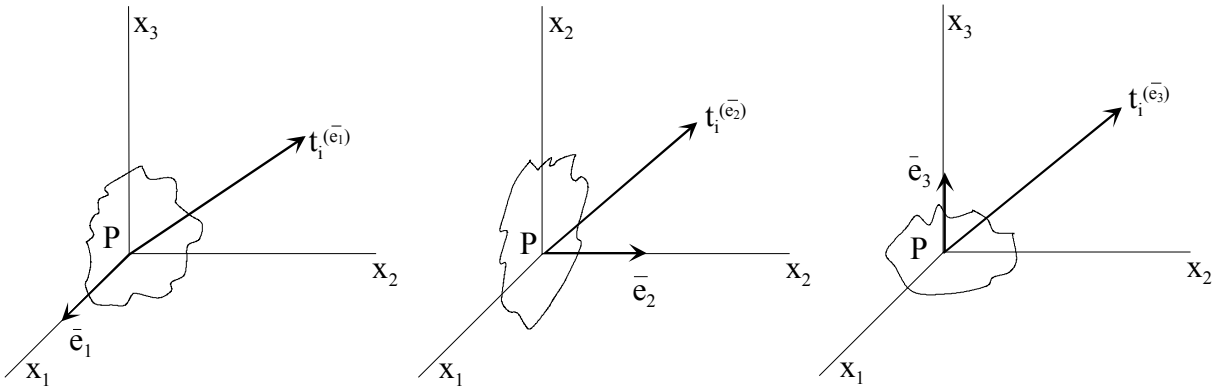
Saskaņā ar Ņūtona likumu par darbību un pretdarbību, ir spēkā:

$$-t_i^{(\bar{n})} = t_i^{(-\bar{n})} \tag{2.5}$$

n_i ir vienības normāle mazam virsmas elementam ΔS.

2.5. Punkta spriegumstāvoklis. Sprieguma tenzors.
(State of stress at a point. Stress tensor)

Nepārtrauktas vides brīvi izvēlētā punktā P Košī sprieguma vektors $t_i^{(\bar{n})}$ ir saistīts ar normāles vektoru n_i, kurš norāda ap punktu P ļoti maza virsmas elementa orientāciju. Tas ir parādīts zīm.2.3. Punktā P visu iespējamo vektoru $t_i^{(\bar{n})}$ un n_i pāru kopumu sauc par spriegumstāvokli (*state of stress*).



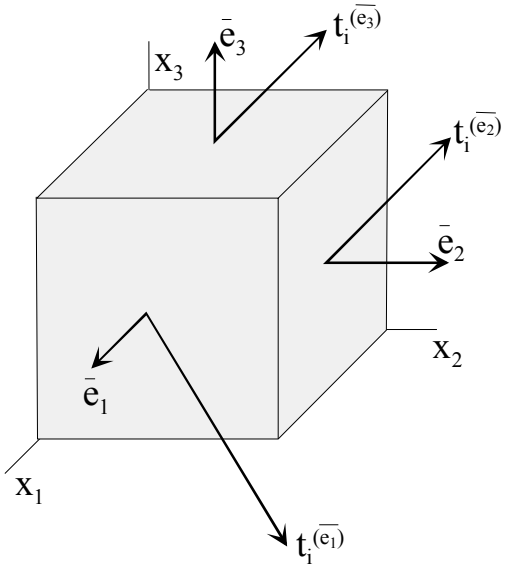
Zīmējums 2.4. Sprieguma un normāles vektori pie koordināšu transformācijas.

Nav nepieciešams sīki aprakstīt katru sprieguma un normāles pāri, lai pilnīgi attēlotu spriegumstāvokli dotā punktā. To var izdarīt nosakot sprieguma vektoru katrā no trīs savstarpēji perpendikulārām plaknēm, kuras krustojas punktā P . Koordināšu transformācijas (t.i. pārveidošanas) vienādojumi kalpo sprieguma vektora noteikšanai katrā no šīm trīs plaknēm. Ja pieņem, ka plaknes ir perpendikulāri koordināšu asīm ar nolūku sīki aprakstīt spriegumstāvokli punktā, tad atbilstošie spriegumi un normālie vektori ir parādīti zīm. 2.4.

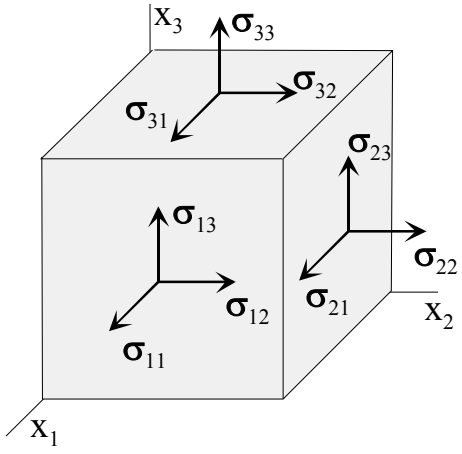
Uzskatāmības labad trīs atsevišķas diagrammas zīm. 2.4. bieži tiek apvienotas shematiskā attēlojumā kā parādīts zīm.2.5.

Katrā no trīs koordināšu plaknēm sprieguma vektora komponentes taisnleņķu koordināšu sistēmā ir:

$$
\begin{aligned}
t^{(\bar{e}1)} &= t_1^{(\bar{e}_1)}\bar{e}_1 + t_2^{(\bar{e}_1)}\bar{e}_2 + t_3^{(\bar{e}_1)}\bar{e}_3 = t_j^{(\bar{e}_1)}\bar{e}_j \\
t^{(\bar{e}_2)} &= t_1^{(\bar{e}_2)}\bar{e}_1 + t_2^{(\bar{e}_2)}\bar{e}_2 + t_3^{(\bar{e}_2)}\bar{e}_3 = t_j^{(\bar{e}_2)}\bar{e}_j \\
t^{(\bar{e}_3)} &= t_1^{(\bar{e}_3)}\bar{e}_1 + t_2^{(\bar{e}_3)}\bar{e}_2 + t_3^{(\bar{e}_3)}\bar{e}_3 = t_j^{(\bar{e}_3)}\bar{e}_j
\end{aligned}
\qquad (2.6)
$$



Zīmējums 2.5. Sprieguma un normāles vektoru apvienojums.



Zīmējums 2.6. Sprieguma tenzora komponentes.

Deviņas sprieguma vektora komponentes

$$t_j^{(\bar{e}i)} \equiv \sigma_{ij} \tag{2.7}$$

sastāda otrās pakāpes (jeb kārtas) taisnleņķu koordināšu sistēmas tenzoru (*Cartesian tensor*), kuru sauc par sprieguma tenzoru (*stress tensor*).

Ekvivalentā spriegumu diāde (*dyadic*) tiek apzīmēta ar $\sum$, tādā veidā formulētās komponentes un matrice attēlo sprieguma tenzoru sekojošā formā:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad \text{vai arī} \quad [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

Sprieguma tenzora komponentes attēlotas zīm.2.6. Komponentes, kas ir perpendikulāras plaknēm $(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33})$, sauc par normāliem spriegumiem (*normal stress*), komponentes, kas atrodas plaknēs $(\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{21}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{32})$ sauc par bīdes spriegumiem (*shear stress*).

Spriegumu komponentes ir pozitīvas, ja to virziens ir koordināšu asu pozitīvā virzienā. Komponentes σ_{ij} darbojas j - tās koordinātes virzienā un plaknē, kurā ārējā normāle ir paralēla i - tai asij.

2.6. Sakarības starp spriegumu tenzoru un spriegumu vektoru.

(The stress tensor-stress vector relationship)

Sakarības starp spriegumu tenzoru σ_{ij} punktā P un sprieguma vektoru $t_i^{(\bar{n})}$ brīvi izvēlētas orientācijas plaknē caur punktu, tiek aprakstītas ar spēku līdzsvaru vai momentu līdzsvaru nepārtrauktas vides mazā tetraedrā, kura virsotne ir punkts P . Tetraedra pamatni pieņem perpendikulāru n_i un trīs skaldnes ir perpendikulāras koordināšu plaknēm, skat. zīm.2.7. Laukumu ABC apzīmē kā dS , skaldņu laukumi ir šī laukuma projekcijas: $dS_1 = dSn_1$ priekš skaldnes CPB , $dS_2 = dSn_2$ priekš skaldnes APC, $dS_3 = dSn_3$ priekš skaldnes BPA ,

vai arī $dS_i = dS\left(\bar{n}\cdot\bar{e}_i\right) = dS\cos\left(\bar{n},\bar{e}_i\right) = dSn_i$ (2.9)

Skaldnes vidējais sprieguma vektors $t_i^{*(\bar{e}_i)}$ un pamatnes vidējais sprieguma vektors $t_i^{*(\bar{n})}$ kopā ar ķermeņa spēku (ieskaitot inerces spēku) tiek ievietoti tetraedra spēku līdzsvara vienādojumā, iegūstot:

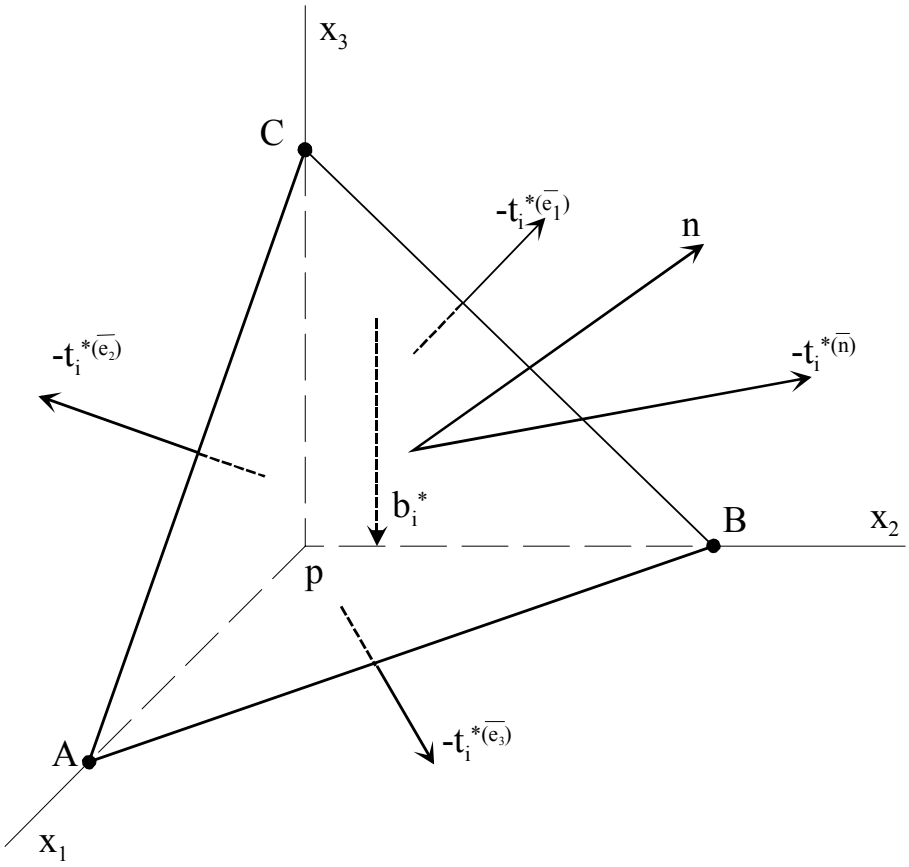
$$t_i^{*(\bar{n})}dS - t_i^{*(\bar{e}1)}dS_1 - t_i^{*(\bar{e}_2)}dS_2 - t_i^{*(\bar{e}_3)}dS_3 + \rho b_i^* dV = 0 \quad (2.10)$$

Ja tetraedra lineāros izmērus reducē (t.i. samazina) uz konstantiem koeficientiem, tad pie maziem izmēriem ķermeņa spēki pieņem nulles vērtību un sprieguma vektors tuvojas īpatnējai vērtībai ar uzdoto virzienu punktā P , tad izteiksme (2.10) reducējas uz sekojošu izteiksmi:

$$t_i^{(\bar{n})} dS = t_i^{(\bar{e}1)} n_1 dS + t_i^{(\bar{e}2)} n_2 dS + t_i^{(\bar{e}3)} n_3 dS = t_i^{(\bar{e}j)} n_j dS \qquad (2.11)$$

Saīsinot kopējo reizinātāju dS un ņemot vērā, ka $t_i^{(\bar{e}j)} \equiv \sigma_{ji}$, izteiksme (2.11) tiek pārveidota:

$$t_i^{(\bar{n})} = \sigma_{ji} n_j \qquad (2.12)$$



Zīmējums 2.7. Sprieguma vektors nepārtrauktas vides tetraedrā.

Vienādojumu (2.12) bieži izsaka matrices veidā:

$$\left[t_{1j}^{(\bar{n})} \right] = \left[n_{1k} \right] \left[\sigma_{kj} \right] \qquad (2.13)$$

kuras precīzs formulējums ir:

$$\left[t_1^{(\bar{n})}, t_2^{(\bar{n})}, t_3^{(\bar{n})} \right] = \left[n_1, n_2, n_3 \right] \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \qquad (2.14)$$

Matricu forma (2.14) ir ekvivalenta komponenšu vienādojumiem:

$$t_1^{(\bar{n})}=n_1\sigma_{11}+n_2\sigma_{21}+n_3\sigma_{31}$$

$$t_2^{(\bar{n})}=n_1\sigma_{12}+n_2\sigma_{22}+n_3\sigma_{32} \qquad (2.15)$$

$$t_3^{(\bar{n})}=n_1\sigma_{13}+n_2\sigma_{23}+n_3\sigma_{33}$$

2.7. Spēku un momentu līdzsvars.

(Force and moment equilibrum)

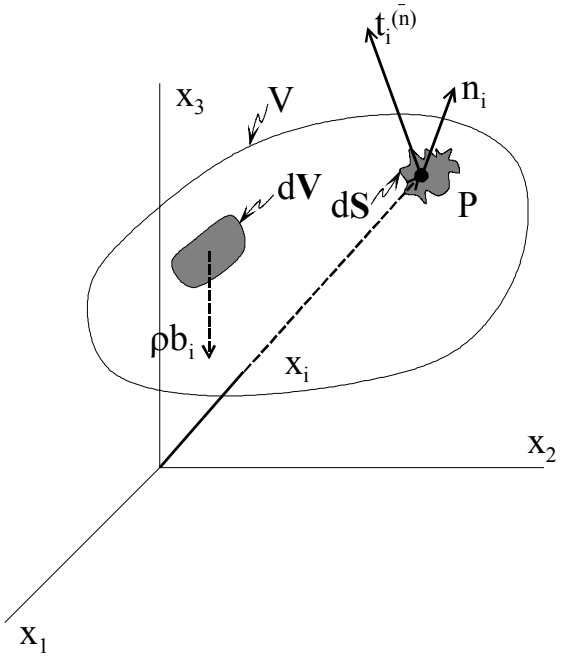
Nepārtrauktas vides brīvi izvēlēta tilpuma V virsmas spēki $t_i^{(\bar{n})}$ un ķermeņa spēki b_i (ieskaitot inerces spēkus, ja tie eksistē) parādīti zīm.2.8. Līdzsvara nosacījumi prasa, lai rezultējošie spēks un moments pa tilpumu būtu vienādi ar nulli. Summējot virsmas un ķermeņa spēkus, iegūst:

$$\int_S t_i^{(\bar{n})}dS+\int_V \rho b_i dV=0 \qquad (2.16)$$

vai arī $\int_S t^{(\hat{n})}dS+\int_V \rho b dV=0$

Aizvietojot $t_i^{(\bar{n})}$ ar $\sigma_{ji}n_j$ un pārvēršot rezultējošo virsmas integrālu tilpuma integrālā izteiksmes (2.16) vietā iegūst:

$$\int_V\left(\sigma_{ji,j}+\rho b_i\right)dV=0 \qquad (2.17)$$



Zīmējums 2.8. Nepārtrauktas vides tilpuma virsmas un ķermeņa spēki.

Tā kā tilpums V ir brīvi izvēlēts, tad integrālu izteiksmē (2.17) var neņemt vērā, tādā gadījumā:

$$\sigma_{ji,j}+\rho b_i=0 \tag{2.18}$$

Šī izteiksme ir līdzsvara vienādojums. Tā kā sprieguma tenzors ir simetrisks, tad:

$$\sigma_{ij,j}+\rho b_i=0 \tag{2.19}$$

Paplašinātā formā līdzsvara vienādojumu raksta sekojoši:

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3}+\rho b_1=0$$

$$\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_3}+\rho b_2=0 \tag{2.20}$$

$$\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3}+\rho b_3=0$$

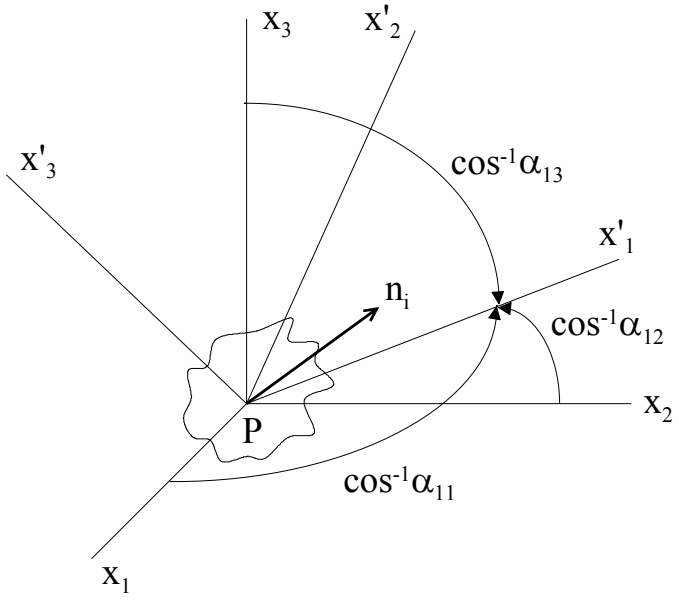
2.8. Sprieguma transformācijas likums.
(Stress transformation laws)

Pieņemam, ka punktā P taisnleņķu koordinātšu sistēmu $Px_1x_2x_3$ un $Px'_1x'_2x'_3$ (skat. zīm.2.9) savstarpējās attiecības tiek izteiktas ar virzienu kosinusu tabulu

	x_1	x_2	x_3
x'_1	α_{11}	α_{12}	α_{13}
x'_2	α_{21}	α_{22}	α_{23}
x'_3	α_{31}	α_{32}	α_{33}

vai arī ar transformācijas matrici $\lfloor a_{ij} \rfloor$, vai arī ar transformācijas diādi (*diadic*):

$$A=a_{ij}\bar{e}_i\bar{e}_j \qquad (2.21)$$



Zīmējums 2.9. Divu taisnleņķu koordinātšu sistēmu savstarpējās attiecības.

Matrices formā sprieguma vektora transformāciju raksta:

$$\left[t'^{(\bar{n})}_{i1}\right]=\left[a_{ij}\right]\left[t^{(\bar{n})}_{j1}\right] \tag{2.22}$$

un sprieguma tenzora transformāciju:

$$\left[\sigma_{ij}\right]=\left[a_{ip}\right]\left[\sigma_{pq}\right]\left[a_{qj}\right] \tag{2.23}$$

Precīzākā formulējumā matricu reizināšana izteiksmēs (2.22) un (2.23) tiek dota attiecīgi:

$$\begin{bmatrix} t'^{(\bar{n})}_{1} \\ t'^{(\bar{n})}_{2} \\ t'^{(\bar{n})}_{3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t^{(\bar{n})}_{1} \\ t^{(\bar{n})}_{2} \\ t^{(\bar{n})}_{3} \end{bmatrix} \tag{2.24}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} & \sigma'_{13} \\ \sigma'_{21} & \sigma'_{22} & \sigma'_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma'_{32} & \sigma'_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{2.25}$$

2.9. Galvenie spriegumi. Spriegumu invarianti.

(Principal stress. Stress invariants)

Punktā P, kurā stinguma komponentes ir σ_{ij}, vienādojumā $t_i^{(\bar{n})}=\sigma_{ji}n_j$ ir apvienots ikviens virziens n_i ar sprieguma vektoru $t_i^{(\bar{n})}$. Tāds virziens, kurā sakrīt $t_i^{(\bar{n})}$ un n_i (*are collinear)* ir parādīts zīm. 2.10 un to sauc par galvenā sprieguma virzienu (*principal stress directions*). Priekš galvenā sprieguma virziena ir spēkā izteiksme:

$$t_i^{(\bar{n})}=\sigma n_i \tag{2.25}$$

kurā σ , sprieguma vektora lielums, tiek saukts par galvenā sprieguma vērtību (*principal stress value*). Ievietojot (2.25) izteiksmē (2.12) un ņemot vērā, ka $n_i=\delta_{ij}n_j$ un $\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$, iegūst vienādojumu:

$$\left(\sigma_{ij}-\delta_{ij}\sigma\right)n_j=0 \tag{2.26}$$

Trīs vienādojumos (2.26) ir četri nezināmie, t.i. trīs virzienu kosinusi n_i un galvenā sprieguma vērtība σ . Risinot (2.26) pie kāda maznozīmīga $n_j=0$, koeficientu determinants $\left|\sigma_{ij}-\delta_{ij}\sigma\right|$ izzūd.

Precīzi formulējot:

$$\left|\sigma_{ij}-\delta_{ij}\sigma\right|=0 \quad \text{vai arī} \quad \begin{vmatrix} \sigma_{11}-\sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}-\sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}-\sigma \end{vmatrix}=0 \tag{2.27}$$

kurš atbilst kuba polinomam no σ :

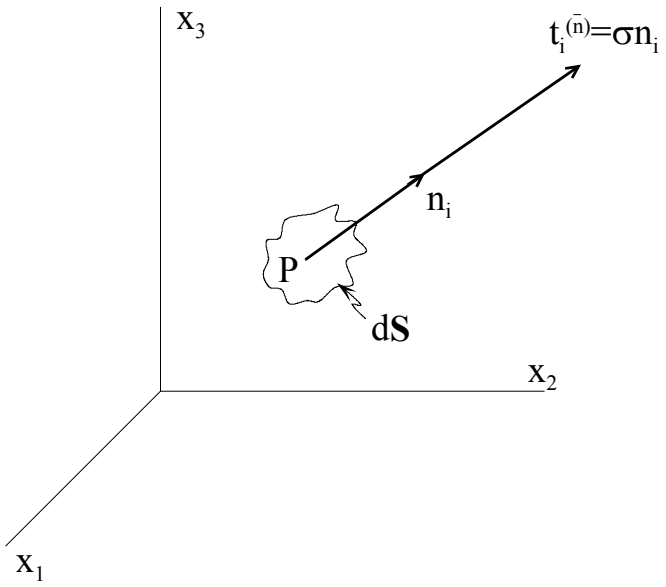
$$\sigma^3-\mathrm{I}_\Sigma\sigma^2+\mathrm{II}_\Sigma\sigma-\mathrm{III}_\Sigma=0 \tag{2.28}$$

šeit $\mathrm{I}_\Sigma=\sigma_{ii}$ (2.29)

$$\mathrm{II}_\Sigma=\frac{1}{2}\left(\sigma_{ii}\sigma_{jj}-\sigma_{ij}\sigma_{ij}\right) \tag{2.30}$$

$$\mathrm{III}_\Sigma=\left|\sigma_{ij}\right|=\det\Sigma \tag{2.31}$$

kurus, attiecīgi, sauc par pirmo, otro un trešo sprieguma invariantu.



Zīmējums 2.10. Galvenā sprieguma virziena attēlojums.

Izteiksmes (2.28) trīs saknes $\sigma_{(1)},\sigma_{(2)},\sigma_{(3)}$ ir trīs galveno spriegumu vērtības. Galveno spriegumu $\sigma_{(k)}$ virzieni ir virzienu kosinusi $n_i^{(k)}$, kuri ir risinājums vienādojumam:

$$\left(\sigma_{ij}-\sigma_{(k)}\delta_{ij}\right)n_j^{(k)}=0 \qquad (2.32)$$

Galveno spriegumu virzienos sprieguma matrice $\lfloor\sigma_{ij}\rfloor$ ir diagonāla:

$$\left[\sigma_{ij}\right]=\begin{bmatrix}\sigma_{(1)} & 0 & 0\\ 0 & \sigma_{(2)} & 0\\ 0 & 0 & \sigma_{(3)}\end{bmatrix} \text{ vai arī } \left[\sigma_{ij}\right]=\begin{bmatrix}\sigma_{\mathrm{I}} & 0 & 0\\ 0 & \sigma_{\mathrm{II}} & 0\\ 0 & 0 & \sigma_{\mathrm{III}}\end{bmatrix} \qquad (2.33)$$

pie kam spriegumi ir sakārtoti tādā veidā, ka $\sigma_{\mathrm{I}}>\sigma_{\mathrm{II}}>\sigma_{\mathrm{III}}$

3. Deformācijas un pārvietojumi.
(Deformation and Strain).

3.1. Daļiņas (partikulas) un punkti.
(Particles and points).

Nepārtrauktas vides mehānikas kinemātikā ar vārdu "punkts" norāda vietu fiksētā telpā. Vārds "daļiņa" apzīmē vides ļoti maza tilpuma elementu. Rezumējot var teikt, ka punkts ir vieta telpā, bet daļiņa ir nepārtrauktas vides materiāla sīka daļa.

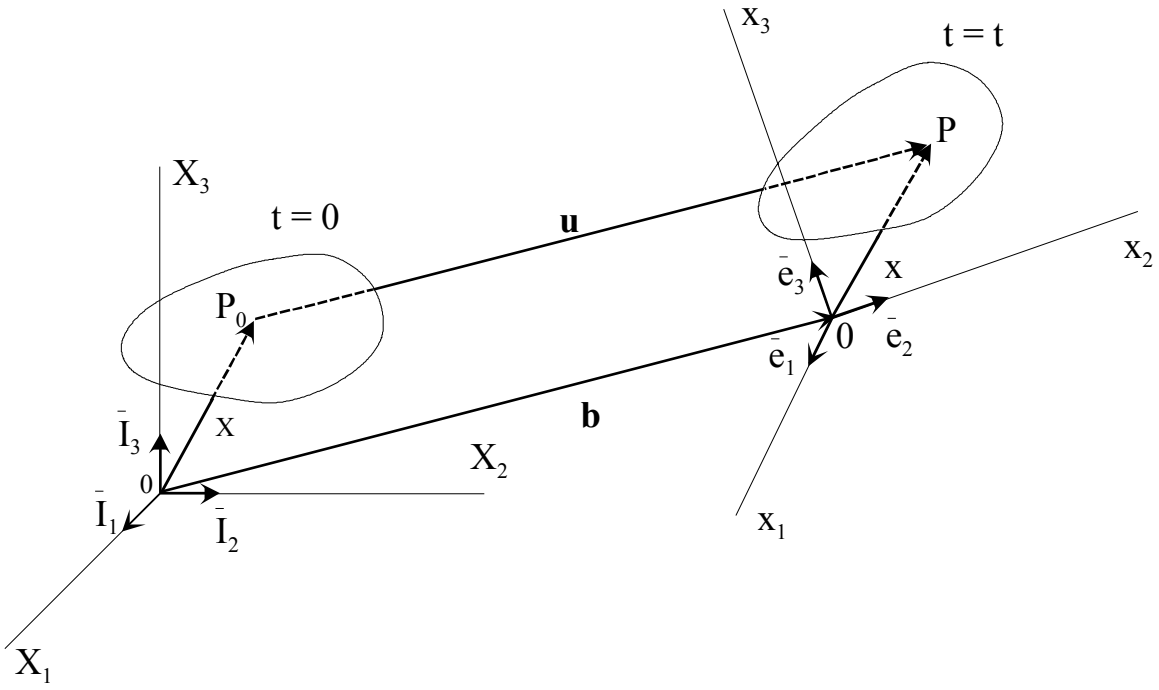
3.2. Nepārtrauktas vides konfigurācija. Deformācijas jēdziens.
(Continuum configuration. Deformation concepts).

Kādā laika momentā t nepārtrauktai videi ir tilpums V ar ierobežojošo virsmu S un tā ieņem fizikālā telpā apgabalu R . Norādot uz vides daļiņu vai telpas punktu koordinātu sistēmā, ir runa par sīki aprakstītu nepārtrauktas vides konfigurāciju.

Termins "deformācija" atsaucas uz nepārtrauktas vides kontūras jeb formas pārmaiņu no sākotnējās (nedeformētās) konfigurācijas uz sekojošu (deformētu) konfigurāciju. Deformācijas izpētē sevišķi uzsver sākotnējo un fināla, jeb gala konfigurāciju un nepievērš uzmanību šo konfigurāciju starpposmiem.

3.3. Stāvokļa vektors. Pārvietojumu vektors.
(Position vector. Displacement vector).

Zīm.3.1 ir parādīta nepārtrauktas vides materiāla nedeformēta konfigurācija laikā $t=0$ kopā ar tā paša materiāla deformēto konfigurāciju vēlākā laikā $t=t$. Izveides attēlošanai ir noderīgas atsevišķas koordinātu asis sākuma un gala konfigurācijām.



Zīmējums 3.1. Nepārtrauktas vides materiāla nedeformēta un deformēta konfigurācija.

Atbilstoši sākuma konfigurācijai vides daļiņa atrodas telpas punktā P_0 un tai ir pozitīvs vektors:

$$X = X_1 \bar{I}_1 + X_2 \bar{I}_2 + X_3 \bar{I}_3 = X_k \bar{I}_k \qquad (3.1)$$

taisnleņķa koordināšu sistēmā $0X_1X_2X_3$.

X_1, X_2, X_3 tiek sauktas par materiāla koordinātēm. Materiāla daļiņas sākumstāvoklis ir punktā P_0 , bet deformētā konfigurācija ir punktā P , kura vietu nosaka ar pozīcijas vektoru:

$$x = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + x_3 \bar{e}_3 = x_i \bar{e}_i \qquad (3.2)$$

ja atskaites sistēma ir taisnleņķa koordināšu asis $0x_1x_2x_3$, šīs koordinātes sauc par telpiskām koordinātēm (*spatial coordinates*).

Relatīvā (attiecīgā, savstarpējā) orientācija materiāla asīs $0X_1X_2X_3$ (*material axes*) un telpiskās asīs $0x_1x_2x_3$ (*spatial axes*) tiek noteikta ar virzienu kosinusiem α_{kK} un α_{Kk}, kurus nosaka kā vienību vektoru reizinājumus:

$$\bar{e}_k \cdot \bar{I}_K = \bar{I}_K \cdot \bar{e}_k = \alpha_{kK} = \alpha_{Kk} \qquad (3.3)$$

K un k ir atšķirīgi indeksi. Tā kā Kronekera simbols ir norāde uz izteiksmi $\bar{I}_K \cdot \bar{I}_P = \delta_{KP}$ un $\bar{e}_k \cdot \bar{e}_p = \delta_{kp}$, tad abu asu sistēmu ortogonalitātes nosacījumu raksta sekojoši:

$$\alpha_{Kk}\alpha_{Kp} = \alpha_{kK}\alpha_{pK} = \delta_{kp}; \quad \alpha_{Kp}\alpha_{Mp} = \alpha_{pK}\alpha_{pM} = \delta_{KM} \qquad (3.4)$$

Zīm. 3.1. vektors **u** savieno punktus P_0 un P (materiāla daļiņas sākuma un beigu pozicijas) un tas ir pārvietojumu vektors (*displacement vector*):

$$\mathbf{u} = u_k \bar{e}_k \qquad (3.5)$$

vai arī $\mathbf{U} = U_K \bar{I}_K$ (3.6)

Šeit komponentes U_K un u_k ir savstarpēji saistītas ar virzienu kosinusu α_{kK}. Vienības vektors tiek izteikts caur materiāla bāzes vektoru $\bar{I}_K$ sekojoši:

$$\bar{e}_k = \alpha_{kK} \bar{I}_K \qquad (3.7)$$

Ievietojot (3.7) izteiksmē (3.5) iegūst:

$$\mathbf{u} = u_k(\alpha_{kK} \bar{I}_K) = U_K \bar{I}_K = \mathbf{U} \qquad (3.8)$$

šeit $U_K = \alpha_{kK} u_k$ (3.9)

Tā kā virziena kosinuss α_{kK} ir const., pārvietojumu vektora komponentes izteiksmē (3.9) atbilst pirmās pakāpes tenzora transformācijas vienādojumam.

Zīm. 3.1 vektors **b** kalpo punkta o vietas norādīšanai attiecībā pret 0. No zīmējuma ģeometrijas:

$$u=b+x-X \tag{3.10}$$

Nepārtrauktas vides mehānikā bieži koordināšu sistēmas $0X_1X_2X_3$ un $ox_1x_2x_3$ sakrīt (pārklājas), tad $\mathbf{b}\equiv 0$ un no (3.10) iegūst:

$$u=x-X \tag{3.11}$$

No šīs izteiksmes taisnleņķa koordināšu sistēmā iegūst galveno izteiksmi:

$$u_k=x_k-\alpha_{kK}X_K \tag{3.12}$$

Ja abas koordināšu sistēmas sakrīt, tad bāzes vektori abām sistēmām ir identiski, tā rezultātā virzienu kosinusu simbols α_{kK} izpilda Kronekera simbola lomu. Tādēļ izteiksme (3.12) pārvēršas sekojošā formā:

$$u_k=x_k-X_k \tag{3.13}$$

3.4. Deformāciju apraksti ar Lagranža un Eilera vienādojumiem.

(Lagrangian and Eulerian descriptions).

Kad nepārtraukta vide ir pakļauta deformācijām, vides daļiņas pārvietojas telpā pa dažādām trajektorijām. Šo kustību var aprakstīt sekojošā veidā:

$$x_i=x_i(X_1,X_2,X_3,t)=x_i(X,t) \quad \text{vai arī} \quad x=x(X,t) \tag{3.14}$$

izteiksme norāda daļiņas atrašanās vietu x_i, kas ieņem punktu (X_1,X_2,X_3) laikā $t=0$.

Tātad izteiksmi (3.14) var interpretēt kā shēmu pārejai no sākotnējās konfigurācijas uz pašreizējo konfigurāciju. Deformēšanās kustības apraksts pēc izteiksmes (3.14) tiek saukts par Lagranža formulējumu.

Ja deformēšanās kustība tiek uzrādīta ar formulu:

$$X_i=X_i(x_1,x_2,x_3,t)=X_i(x,t) \quad \text{vai arī} \quad X=X(x,t) \tag{3.15}$$

kurā neatkarīgie mainīgie ir koordinātes x_i un t , tad šo izteiksmi sauc par Eilera formulējumu.

3.5. Deformāciju gradienti. Pārvietojumu gradienti.

(Deformation gradients. Displacement gradients).

Diferencējot (3.14) (*partial differentiation of (3.14))* ņemot vērā X_i no tenzora $\partial x_i / \partial X_j$, iegūst materiāla deformācijas gradientu (*material deformation gradient*). Simbolu veidā $\partial x_i / \partial X_j$ attēlo ar diādi (*dyadic*)

$$\mathbf{F} = x\nabla_x \equiv \frac{\partial x}{\partial X_1}\bar{e}_1 + \frac{\partial x}{\partial X_2}\bar{e}_2 + \frac{\partial x}{\partial X_3}\bar{e}_3 \qquad (3.16)$$

kurā diferenciāloperators ir $\nabla_x = \frac{\partial}{\partial X_i}\bar{e}_i$

Matricu formā **F** raksta:

$$F = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X_1} & \frac{\partial}{\partial X_2} & \frac{\partial}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial x_1/\partial X_1 & \partial x_1/\partial X_2 & \partial x_1/\partial X_3 \\ \partial x_2/\partial X_1 & \partial x_2/\partial X_2 & \partial x_2/\partial X_3 \\ \partial x_3/\partial X_1 & \partial x_3/\partial X_2 & \partial x_3/\partial X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial x_i / \partial X_j \end{bmatrix} \qquad (3.17)$$

Diferencējot (*partial differentiation*) pārvietojuma vektoru u_j ņemot vērā koordinātes, iegūst vai nu materiāla pārvietojumu gradientu (*material displacement gradient*) $\partial u_i / \partial X_j$, vai arī telpisko pārvietojumu gradientu (*spatial displacement gradient*) $\partial u_i / \partial x_j$.

No izteiksmes (3.13), kurā u_i izteikts kā koordinātu starpība, šis tenzors tiek dots deformāciju gradienta terminos kā materiāla gradients:

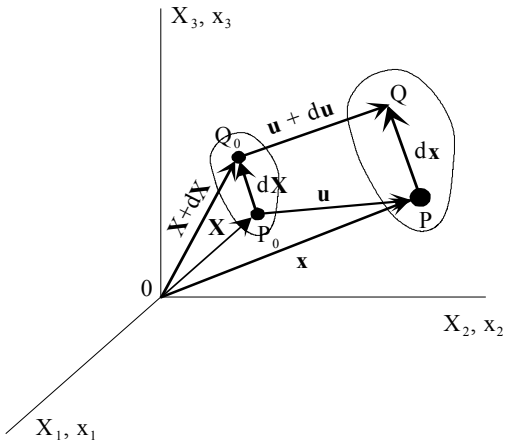
$$\frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} - \delta_{ij}$$

un tā forma matrices veidā ir:

$$J = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X_1} & \frac{\partial}{\partial X_2} & \frac{\partial}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial u_1 / \partial X_1 & \partial u_1 / \partial X_2 & \partial u_1 / \partial X_3 \\ \partial u_2 / \partial X_1 & \partial u_2 / \partial X_2 & \partial u_2 / \partial X_3 \\ \partial u_3 / \partial X_1 & \partial u_3 / \partial X_2 & \partial u_3 / \partial X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial u_i / \partial X_j \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

3.6. Deformāciju tenzori.
(Deformation tensors)

Zīm.3.2 parādīts cieta ķermeņa sākuma (nedeformētas) un beigu (deformētās) formas jeb konfigurācijas stāvokļi koordinātu sistēmās $0X_1X_2X_3$ un $ox_1x_2x_3$, kas savstarpēji pārklājas (sakrīt). Tuvumā esošās daļiņas, kas pirms deformācijas aizņem punktus P_0 un Q_0 deformētā ķermeņa stāvoklī punktus P un Q attiecīgi.



Zīmējums 3.2. Cieta ķermeņa nedeformētā un deformētā forma divās sistēmās.

Attāluma kvadrāts starp punktiem P_0 un Q_0 ir:

$$(dX)^2 = dX \cdot dX = dX_i dX_i = \delta_{ij} dX_i dX_j \tag{3.19}$$

No izteiksmes (3.15) dX_i (*the distance differential*):

$$dX_i = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} dx_j \tag{3.20}$$

tad garuma kvadrātu $(dX)^2$ izteiksmē (3.19) var rakstīt:

$$(dX)^2 = \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} dx_i dx_j = C_{ij} dx_i dx_j \tag{3.21}$$

kurā otrās pakāpes tenzoru

$$C_{ij} = \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \tag{3.22}$$

sauc par Košī deformācijas tenzoru (*Cauchy's deformation tensor*).

Deformētajā konfigurācijā garuma starpības kvadrāts starp P un Q ir:

$$(dx)^2 = dx \cdot dx = dx_i dx_i = \delta_{ij} dx_i dx_j \tag{3.23}$$

No izteiksmes (3.14) attāluma starpība šeit ir:

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j \tag{3.24}$$

ievietojot garuma kvadrātu izteiksmē (3.23), iegūst:

$$(dx)^2 = \frac{\partial x_k}{\partial X_i}\frac{\partial x_k}{\partial X_j} \partial X_i \partial X_j = G_{ij} dX_i dX_j \tag{3.25}$$

kurā otrās pakāpes tenzoru

$$G_{ij} = \frac{\partial x_k}{\partial X_i}\frac{\partial x_k}{\partial X_j} \tag{3.26}$$

sauc par Grīna deformācijas tenzoru (*Green's deformation tensor*).

Priekš divām daļiņām, kas atrodas tuvu viena no otras vienā cietā ķermenī, starpība $(dx)^2 - (dX)^2$ ir deformāciju mērs (*measure of deformation*) starp sākuma un beigu konfigurācijām.

Ja šī starpība starp kontinuuma blakus esošām daļiņām ir vienāda (*identically*) ar nulli, tad notiek *rigid displacement.* No (3.25) un (3.19) šo starpību izsaka sekojošā veidā:

$$(dx)^2 - (dX)^2 = \left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i}\frac{\partial x_k}{\partial X_j} - \delta_{ij} \right) dX_i dX_j = 2 L_{ij} dX_i dX_j \tag{3.27}$$

kurā otrās pakāpes tenzoru

$$L_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i}\frac{\partial x_k}{\partial X_j} - \delta_{ij} \right) \tag{3.28}$$

sauc par ierobežotas piepūles tenzoru (*Lagrangian (or Green"s) finite strain tensor)*.

4. Lineārā elastība.

4.1. Vispārīgais Huka likums. Deformācijas enerģijas funkcija.

(Generalized Hooke" s law. Strain energy function).

Klasiskā lineārā elastības teorijā pieņemts, ka pārvietojumi un pārvietojumu gradients ir pietiekami mazi un apmierina Lagranža un Eilera vienādojumu prasības. Saskaņā ar pārvietojumu vektoru u_i lineārās deformācijas tenzors ir ekvivalents izteiksmei:

$$l_{ij}=\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)=\frac{1}{2}\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right) \qquad (4.1)$$

Turpmāk tiek pieņemts, ka deformācijas process ir adiabātisks (t.i. siltums nezūd un nepalielinās) un izotermāls (konstanta temperatūra), ja nav speciāls pieņēmums par pretējo.

Vienādojumu struktūra priekš lineāri elastīgiem cietiem ķermeņiem satur spriegumu un deformāciju tenzorus izteiksmē:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkm}\,\varepsilon_{km} \qquad (4.2)$$

kuru sauc par vispārīgo Huka likumu *(generalized Hooke's law)*. Izteiksmē (4.2) elastības konstanšu tenzors C_{ijkm} satur 81 komponenti.

Simetrijas rezultātā esošiem deformāciju un spriegumu tenzoriem ir 36 atšķirīgas elastības konstantes. Ar nolūku, lai rakstītu Huka likumu ar šīm 36 komponentēm, spriegumu un deformāciju komponenšu apzīmējumu divu indeksu sistēmu bieži aizstāj ar viena indeksa sistēmu, kam diapazons ir 6.

Tādā veidā indeksācija ir:

$\sigma_{11}=\sigma_1$ $\qquad$ $\sigma_{23}=\sigma_{32}=\sigma_4$

$\sigma_{22}=\sigma_2$ $\qquad$ $\sigma_{13}=\sigma_{31}=\sigma_5$

$$\sigma_{33}=\sigma_3 \qquad \sigma_{12}=\sigma_{21}=\sigma_6 \tag{4.3}$$

$$\varepsilon_{11}=\varepsilon_1 \qquad 2\varepsilon_{23}=2\varepsilon_{32}=\varepsilon_4$$

$$\varepsilon_{22}=\varepsilon_2 \qquad 2\varepsilon_{13}=2\varepsilon_{31}=\varepsilon_5$$

$$\varepsilon_{33}=\varepsilon_3 \qquad 2\varepsilon_{12}=2\varepsilon_{21}=\varepsilon_6 \tag{4.4}$$

Huka likumu var rakstīt sekojošā veidā:

$$\sigma_K=C_{KM}\varepsilon_M \qquad (K,M=1,2,3,4,5,6) \tag{4.5}$$

šeit C_{KM} ir 36 elastības konstantes.

Ja termisko iedarbību neņem vērā, tad enerģijas vienādojumu var rakstīt sekojoši:

$$\frac{du}{dt}=\frac{1}{\rho}\sigma_{ij}D_{ij}=\frac{1}{\rho}\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} \tag{4.6}$$

šeit $D_{ij}=D_{ji}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$ deformācijas tenzora koeficients (norma) *(rate of deformation tensor),* $\partial v_i / \partial x_j$ (jeb Υ_{ij}) ātruma gradienta tenzors *(velocity gradient tensor)*, ρ - blīvums *(density)*.

Tādā gadījumā iekšējā enerģija *(internal energy)* ir pilnīgi mehāniska un tiek saukta par deformāciju enerģiju *(strain energy)* (attiecināta uz masas vienību). No (4.6) iegūst:

$$du=\frac{1}{\rho}\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij} \tag{4.7}$$

Simbols u priekš enerģijas apzīmēšanas literatūrā ir ieviesies tāpēc, ka enerģijas izmaiņa bieži parādās tikai kā niecīga pārmaiņa, kuru ievēro priekš

pārvietojumu vektora u_i lieluma. Ja u uzskata par funkciju no deformācijas deviņām komponentēm, t.i. $u=u(\varepsilon_{ij})$, tās diferenciāls ir:

$$du=\frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}}d\varepsilon_{ij} \tag{4.8}$$

Salīdzinot (4.7) un (4.8) var redzēt, ka

$$\frac{1}{\rho}\sigma_{ij}=\frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}} \tag{4.9}$$

Deformācijas enerģijas blīvums u^*, (attiecināts uz tilpuma vienību) *(strain energy density)* tiek definēts sekojoši:

$$u^*=\rho u \tag{4.10}$$

un tā kā pie mazām deformācijām ρ pieņem konstantu, u^* ir īpašības, ka:

$$\sigma_{ij}=\rho\frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}}=\frac{\partial u^*}{\partial \varepsilon_{ij}} \tag{4.11}$$

Bez tam, deformāciju pie enerģijas nulles stāvokļa ir iespējams izvēlēties kā patvaļīgu lielumu, un, ja spriegums izzūd ar deformāciju, tad vienkārša deformācijas enerģijas forma, kas ir noteicošā pie lineārām sprieguma deformācijas attiecībām, tiek izteikta sekojošā veidā:

$$u^*=\frac{1}{2}C_{ijkm}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{km} \tag{4.12}$$

Ņemot vērā (4.2), šo vienādojumu var rakstīt sekojoši:

$$u^*=\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \tag{4.13}$$

Viena indeksa sistēmas apzīmējumos izteiksmi (4.12) raksta:

$$u^*=\frac{1}{2}C_{KM}\varepsilon_K\varepsilon_M \tag{4.14}$$

šeit $C_{KM}=C_{MK}$

Šīs simetrijas dēļ neatkarīgu elastības konstanšu vislielākais skaits ir 21, ja eksistē deformācijas enerģijas funkcija.

4.2. Izotropija. Anizotropija. Elastības simetrija.

(Isotropy. Anisotropy. Elastic symmetry)

Ja elastības īpašības ir neatkarīgas no to aprakstošās sistēmas, tad materiālu sauc par elastīgi izotropu *(elastically isotropic)*. Ja materiāls nav izotrops, tad to sauc par anizotropu materiālu *(anisotropic)*. Cieta ķermeņa īpašības, kas atbilst Huka likumam, izsaka ar koeficientiem C_{KM} , priekš anizotropa ķermeņa pastāv elastības konstanšu matrice sekojošā formā:

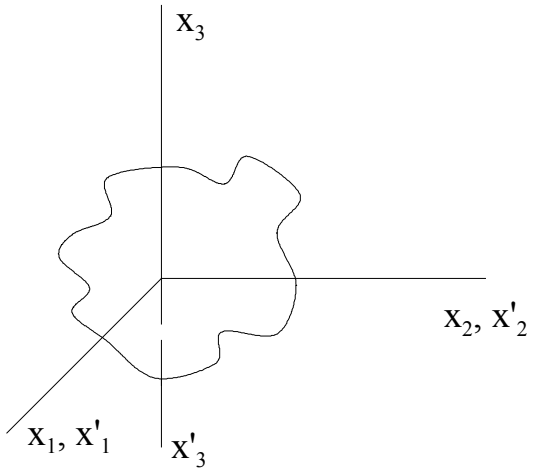
$$C_{KM}=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \qquad (4.15)$$

Ja priekš ķermeņa eksistē enerģijas funkcija, tad $C_{KM}=C_{MK}$ un 36 konstantes izteiksmē (4.15) samazinās uz skaitu 21.

Elastības simetrijas plaknē eksistē punkts, kurā elastības konstantēm ir viena un tā pati vērtība priekš katra koordinašu sistēmas pāra, kurš ir atspoguļojums (t.i. spoguļattēls) no kāda cita attiecībā pret šo plakni. Asis šādā koordinašu sistēmā tiek sauktas par ekvivalento elastības virzienu *(equivalent elastic directions)*. Ja x_1x_2 plakne ir viena no elastības simetrijas plaknēm, tad konstantes C_{KM} ir invariantas (t.i. neatkarīgas no koordinašu sistēmas izvēles) pie koordinašu transformācijas:

$$x'_1 = x_1 \qquad x'_2 = x_2 \qquad x'_3 = -x_3 \tag{4.16}$$

kā redzams zīm.4.1.



Zīmējums 4.1. Ekvivalento elastības virzienu asis.

Transformācijas matrice no (4.16) ir:

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

Ievietojot izteiksmes (4.17) vērtības transformācijas vienādojumos attiecīgi priekš lineāra sprieguma un deformācijām, iegūst materiāla elastības matrici $x_1 x_2$ simetrijas plaknē:

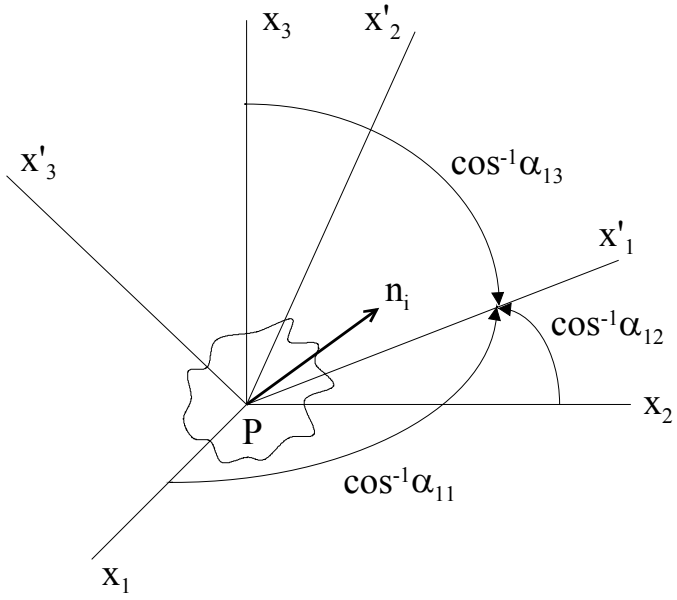
$$[C_{KM}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{54} & C_{55} & 0 \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

Paskaidrojums. Transformācijas vienādojums lineāram spriegumam:

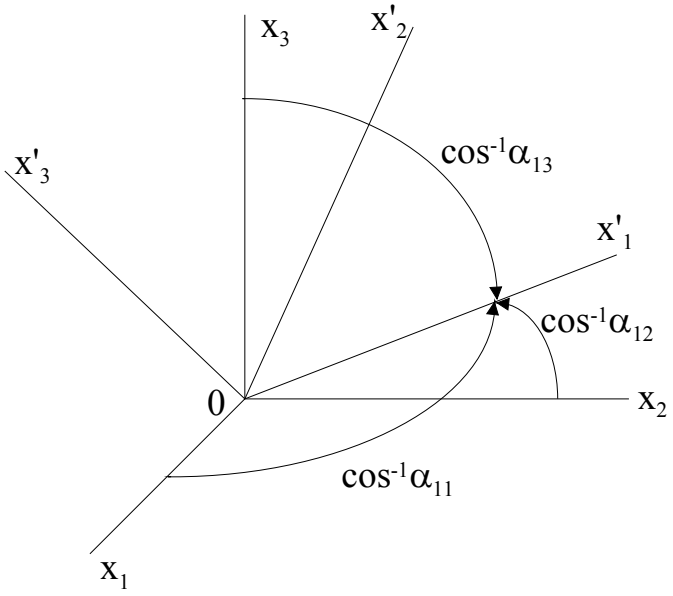
$$\sigma'_{ij} = a_{ip} a_{jq} \sigma_{pq}$$

virzienu kosinusi pie transformācijām:

	x_1	x_2	x_3
x'_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
x'_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
x'_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}



Zīmējums 4.2.



Zīmējums 4.3.

Transformācijas vienādojums lineārām deformācijām:

$$\varepsilon'_{ij} = a_{ip} a_{jq} \varepsilon_{pq}$$

Paskaidrojuma beigas.

Izteiksmes (4.18) 20 komponentes tiek reducētas (t.i. samazinās skaits) uz 13, ja eksistē deformācijas enerģijas funkcija.

Ja materiālam ir trīs savstarpēji perpendikulāras simetrijas plaknes, tad materiālu sauc par ortotropu *(orthotropic)* un tā elastības matrice ir:

$$\left[C_{KM}\right] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \qquad (4.19)$$

Šai matricei ir 12 neatkarīgas konstantes, vai arī 9 konstantes, ja $C_{KM} = C_{MK}$.

4.3. Izotropa vide. Elastības konstantes.

(Isotropic media. Elastic constants).

Ķermeni, kas ir vienādi elastīgs visos virzienos, sauc par izotropu. Jebkura plakne un jebkura ass ir kāda no elastības simetrijas plaknēm vai asīm. Izotropam materiālam ir 2 elastības konstantes un elastības matrice ir simetriska, nerēķinoties ar to, vai eksistē deformācijas enerģijas funkcija. Izotropa materiāla divas neatkarīgas konstantes ir tā saucamās Lamē konstantes λ un μ :

$$\mu=\frac{\mathrm{E}}{2(1+\upsilon)}\ ; \qquad \lambda=\frac{\mathrm{E}\upsilon}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}$$

E - materiāla elastības modulis, υ - Puassona koeficients.

Matrice (4.19) reducējas uz izotropi elastīgu formu:

$$[C_{KM}]=\begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \qquad (4.20)$$

Izmantojot λ un μ Huka likums (4.2) priekš izotropa ķermeņa (jeb materiāla) tiek rakstīts:

$$\sigma_{ij}=\lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk}+2\mu\varepsilon_{ij} \qquad (4.21)$$

No šī vienādojuma var izteikt deformāciju:

$$\varepsilon_{ij}=\frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\delta_{ij}\sigma_{kk}+\frac{1}{2\mu}\sigma_{ij} \qquad (4.22)$$

Priekš vienkārša vienvirziena spriegumstāvokļa χ_1 virzienā konstantes E un υ tiek ievietotas attiecībās $\sigma_{11}=\mathrm{E}\varepsilon_{11}$ un $\varepsilon_{22}=\varepsilon_{33}=-\upsilon\varepsilon_{11}$.

Konstanti E sauc par Junga moduli *(Young's modulus)* un υ sauc par Puassona koeficientu *(Poisson's ratio)*. Izmantojot šīs konstantes, Huka likums izotropam ķermenim ir:

$$\sigma_{ij}=\frac{\mathrm{E}}{1+\upsilon}\left(\varepsilon_{ij}+\frac{\upsilon}{1-2\upsilon}\delta_{ij}\varepsilon_{kk}\right) \tag{4.23}$$

vai arī apgrieztā veidā

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1+\upsilon}{\mathrm{E}}\sigma_{ij}-\frac{\upsilon}{\mathrm{E}}\delta_{ij}\sigma_{kk} \tag{4.24}$$

Ņemot vērā pastāvīgu hidrostatiskā spiediena stāvokli kā spriegumu, ir iespējams definēt tā saucamo kompresijas moduli *(bulk modulus)*:

$$\mathrm{K}=\frac{\mathrm{E}}{3(1-2\upsilon)} \quad \text{vai arī} \quad \mathrm{K}=\frac{3\lambda+2\mu}{3} \tag{4.25}$$

kurš attiecas uz cieta ķermeņa kubveida paplašināšanos *(cubical dilatation)* pie slodzes. Priekš tā saucamās tīrās bīdes stāvokļa *(pure shear)* bīdes modulis G *(shear modulus)* attiecas uz sprieguma un deformācijas bīdes komponentēm. Faktiski G ir vienāds ar μ :

$$\mu=G=\frac{\mathrm{E}}{2(1+\upsilon)} \tag{4.26}$$

4.4. Elastostatikas problēmas. Elastodinamikas problēmas.
(Elastostatic problems. Elastodynamic problems).

Homogēna izotropa ķermeņa elastostatikas problēmas vienādojumu veidā:

(a) līdzsvara vienādojumi

$$\sigma_{ji,j}+\rho b_i=0 \tag{4.27}$$

(b) Huka likums

$$\sigma_{ij}=\lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk}+2\mu\varepsilon_{ij} \tag{4.28}$$

(c) deformāciju-pārvietojumu attiecības

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right) \tag{4.29}$$

Šīm attiecībām jābūt izpildītām cieta ķermeņa visos iekšējos punktos. Tātad, uzrādītiem spriegumiem un/vai pārvietojumiem jābūt izpildītiem uz ķermeņa virsmas.

Elastībā robežu vērtības problēma parasti tiek noteikta sakarā ar robežu nosacījumiem, priekš kuriem:

(1) uz robežas pārvietojumi ir noteikti, t.i. uzrādīti visās tās vietās,

(2) spriegums uz robežas ir noteikts visās robežas vietās,

(3) pārvietojumi ir noteikti ar robežvirsmas daļu, spriegums ir noteikts ar atlikušo robežvirsmas daļu.

Priekš šīs problēmas, kurā robežu pārvietojumu komponentes visur ir uzdotas ar izteiksmi

$$u_i=g(\mathrm{X}) \tag{4.30}$$

pārvietojumu-deformāciju attiecību (4.29) var ievietot Huka likuma izteiksmē (4.28) un rezultātu savukārt izteiksmē (4.27), tad iegūst tā saucamo Navjē–Košī *(Navier – Cauchy)* vienādojumu:

$$\mu u_{i,jj}+(\lambda+\mu)u_{j,ji}+\rho b_i=0 \tag{4.31}$$

Formulējot elastodinamikas problēmu, līdzsvara vienādojums (4.27) ar kustības vienādojumu:

$$\sigma_{ij,j}+\rho b_i=\rho\dot{v}_i \tag{4.32}$$

un sākuma nosacījumi jāapraksta kā robežnosacījumi. Analoģiski kā (4.31) šeit vienādojums ir:

$$\mu u_{i,jj}+(\lambda+\mu)u_{j,ji}+\rho b_i=\rho\ddot{u}_i \qquad (4.33)$$

4.5. Superpozicijas teorēma.

(Theorem of superposition)

Lineārās elastības vienādojumi ir lineāri vienādojumi un superpozicijas principu pielieto sekojošā veidā: ja, piemēram, $\sigma_{ij}^{(1)}$, $u_i^{(1)}$ ir sistēmas (4.27), (4.28) un (4.29) risinājums pie pieliktā spēka $b_i^{(1)}$ un $\sigma_{ij}^{(2)}$, $u_i^{(2)}$ ir risinājums pie spēka $b_i^{(2)}$, tad $\sigma_{ij}=\sigma_{ij}^{(1)}+\sigma_{ij}^{(2)}$, $u_i=u_i^{(1)}+u_i^{(2)}$ ir sistēmas atrisinājums pie spēka $b_i=b_i^{(1)}+b_i^{(2)}$.

5. Plastiskums.
(Plasticity)

5.1. Pamatjēdzieni un definīcijas.
(Basic concepts and definitions)

Elastīgās deformācijas raksturojas ar sarežģītu sākotnējās formas atgūšanu pēc pieliktās slodzes noņemšanas. Elastīgās deformācijas ir atkarīgas no sprieguma lieluma un nav atkarīgas no sprieguma jeb slodzes pielikšanas "vēstures".

Sīkas neatgriezeniskas deformācijas, kuras rodas no slīdes vai no dislokācijas materiāla atomārā līmenī un kuras tādējādi noved pie ilgstošām izmēru izmaiņām, tiek sauktas par plastiskām deformācijām.

Tādas deformācijas notiek tikai pie sprieguma palielināšanās virs kāda noteikta līmeņa, kuru sauc par elastības robežu (*elastic limit*), jeb sprieguma jaudu (*yield stress*), kuru turpmākā tekstā apzīmēs ar σ_Y .

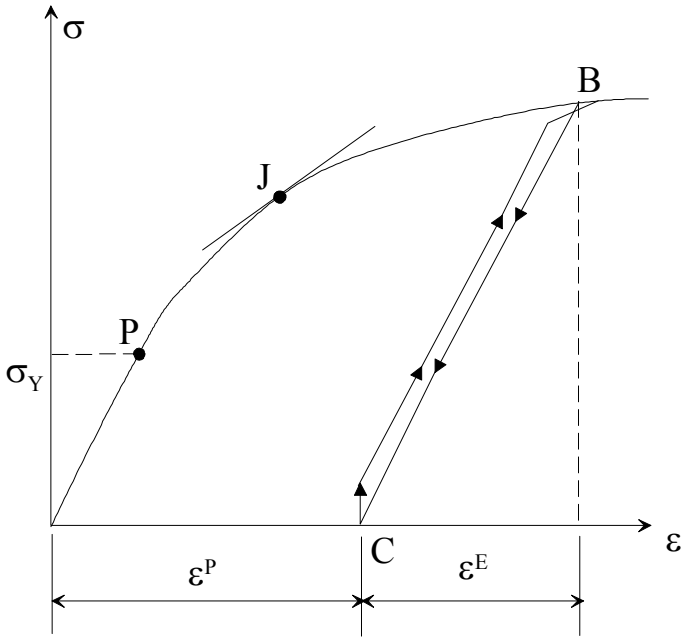
Plastiskuma teorijā galvenā nozīme ir atbilstošs spriegumu–deformāciju matemātiskais formulējums priekš plastisko deformāciju apraksta un apriora kritēriju noteikšana, lai prognozētu plastiskās izturēšanās iestāšanās sākumu.

Termins "plastiskā tecēšana" (*plastic flow*) plašā nozīmē ir norāde uz plastisko deformāciju. Tomēr, atšķirībā no šķidruma tecēšanas, cieta ķermeņa plastiskā tecēšana ir saistīta ar deformācijas lielumu kā arī ar deformācijas normu. Cietos ķermeņos "plastisko" stāvokli uztur vienmērīgs cirpes, jeb bīdes, spriegums. Tikpat lielā mērā kā plastiskuma pamatjēdzieni, ir svarīgi ņemt vērā sprieguma–deformācijas diagrammu, kas iegūta materiāla viendimensijas slogojuma eksperimentā, zīm.5.1. Šinī diagrammā σ ir nominālais spriegums (spēks/sākotnējais šķērsgriezuma laukums), bet deformācija ε attēlo (pārstāv) vai nu vispārpieņemto deformāciju (*conventional (engineering) strain*), kuru definē kā:

$$e=\left(L-L_0\right)\Big/ L_0 \tag{5.1}$$

(šeit L - materiāla parauga garums slogojuma konkrētā momentā, L_0 - parauga sākotnējais garums), vai arī kā logaritmisko deformāciju (*natural (logarithmic) strain*), kuru definē sekojoši:

$$\varepsilon=\ln\left(L\Big/ L_0\right)=\ln\left(1+e\right)=e-e^2\Big/ 2+O\left(e^3\right) \tag{5.2}$$



*Z*īmējums 5.1. Plastiskuma jēdzienu grafiskais attēlojums.

Priekš nelielas deformācijas šie divi deformāciju mēri ir ļoti līdzīgi un bieži to starpību var neņemt vērā.

Priekš dotā punkta P ar tam atbilstošu spriegumu σ_Y sprieguma–deformācijas līkne tiek sadalīta elastības apgabalā (*elastic range*) un plastiskuma apgabalā (*plastic range*). Par nožēlošanu, punkta P ne vienmēr ir konkrēti definēts. Dažreiz pieņem tā saucamo proporcionalitātes robežu (*proportional limit*), kurš atrodas līknes lineāras daļas augšējā galā. To iespējams izvēlēties kā punktu J , kuru sauc par šķietamo elastības robežu (*Johnson s apparent elastic limit*), un tad šo punktu nosaka kā punktu, kurā

līknes slīpums ir 50% no slīpuma līknes (šī grafika) sākumā. Pēc citas metodes šo punktu nosaka atkarībā no sprieguma, pie kura paliekošā deformācija sastāda 0.2 %.

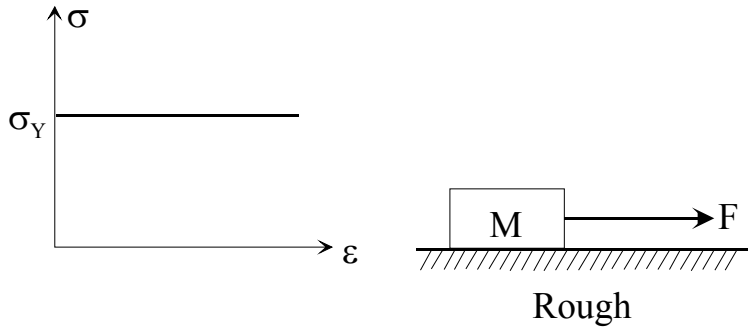
Līknes elastības apgabala sākumā, kurš var būt gan lineārs, gan nelineārs, slodzes pieaugšana ir cēlonis sprieguma-deformācijas stāvokļa punkta kustībai augšup gar līkni, bet slodzes samazināšanās vai tās noņemšana ir cēlonis punkta kustībai lejup pa to pašu līkni. Tā notiek tikai elastības apgabalā. Turpretim līknes plastiskā apgabalā, piemēram, slodzi noņemot punktā B (zīm.5.1), turpmākais ceļš (jeb trajektorija) BC ir paralēls līknes lineāri elastīgai daļai. Punktā C, kurā spriegums ir vienāds ar nulli, ir pastāvīga (paliekoša) plastiskā deformācija ε^P . Atgūtā elastīgā deformācija, atslogojot no punkta B, ir ε^E (zīm.5.1). Atkārtoti noslogojot no punkta C stāvokļa atpakaļ uz punktu B, iegūst līknes posmu, kas ir cieši klāt, bet nesakrīt ar BC, pie tam apejot punktu B. Rezultātā iegūst mazu, niecīgu histerēzes cilpu (*hysteresis loop*) no enerģijas zaudēšanas atslogošanas–noslogošanas ciklā. Lai atgrieztos punktā B ir nepieciešams palielināt slodzi, tas ir cēlonis tālākai deformācijai, šāds stāvoklis attiecas uz jēdzienu–materiāla stiprināšana jeb norūdīšana ar darbu (*work hardening*) vai stiprināšana, norūdīšana ar deformāciju (*strain hardening*). Tādēļ plastiskā apgabalā spriegums ir atkarīgs no materiāla visa slogojuma vai deformēšanās "vēstures".

Lai gan temperatūrai ir zināma ietekme uz materiāla plastisko izturēšanos, parasti pieņem izotermālo stāvokli un temperatūru ņem vērā kā parametru. Tāpat arī plastiskumā praktiski neņem vērā slodzes pielikšanas ātruma ietekmi uz sprieguma–deformācijas līkni. Plastiskās deformācijas apskata kā neatkarīgas no laika un atsevišķi atšķir tādas parādības kā materiāla šļūde (*creep*) un relaksācija (*relaxation*).

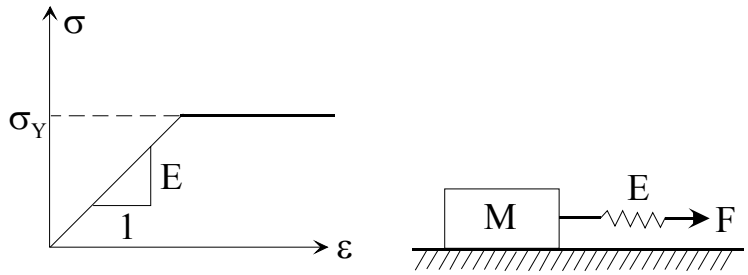
5.2. Materiāla idealizēti plastiskā izturēšanās.
(Idealized plastic behavior)

Trīs dimensiju teorijā priekš materiāla plastiskās izturēšanās daudz ko var iegūt no zināmās (t.i. eksperimentāli iegūtās) viendimensijas slogojuma sprieguma–deformācijas līknes, zīm.5.1. Parasti šīs idealizētās sprieguma–deformācijas līknes ir līdzīgas tām, kas attēlotas zīm.5.2, katra atsevišķi priekš kāda vienkārša mehānikas modeļa. Modelī masu pārvietojumi apraksta, jeb attēlo, plastisko deformāciju un spēks F spēlē sprieguma lomu.

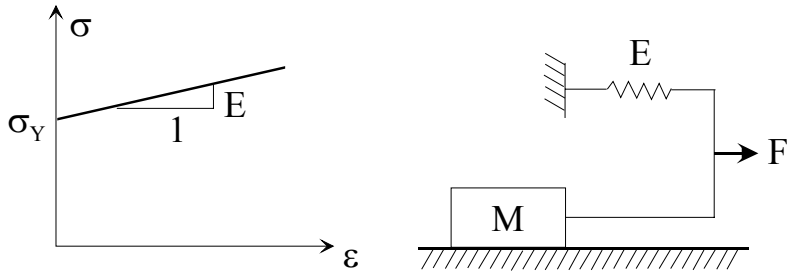
Zīm.5.2a elastiskā reakcija un stiprināšana ar darbu (*work hardening*) nav vispār, turpretim (b) iepriekšējā elastīgā reakcija netiek ieskaitīta stiprināšanas ar darbu procesā. Stiprināšanas ar darbu trūkums plastiskā reakcijā tiek saukts par pilnīgu plastiskumu (*perfectly plastic*). Attēli (a) un (b) ir sevišķi derīgi uzkrājošos plastisko deformāciju izpētē (*contained plastic deformation*), kad lielas deformācijas tiek kavētas (nav atļautas). Zīm.5.2c elastības reakcija netiek ievērota un stiprināšana ar darbu ir lineāra. Šis attēls, kā arī (a), plaši tiek pielietots neuzkrājošās plastiskās tecēšanas gadījumos (*uncon-tained plastic flow*).



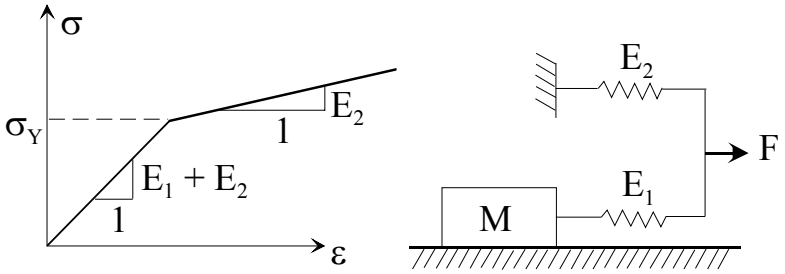
a) pilnīgi plastisks (*Rigid-Perfectly Plastic*)



b) elastīgs–pilnīgi plastisks (*Elastic-Perfectly Plastic*)



c) stingra lineāra stiprināšana ar pielikto darbu (Rigid-*Linear Work Hardening*)



d) lineāri elastīga stiprināšana ar darbu (*Elastic-Linear Work Hardening*)

Zīmējums 5.2. Materiālu ideāli plastiskās izturēšanās variantu attēlojums.

5.3. Materiāla tecēšanas nosacījumi. *Tresca* un *Mises* kritēriji.

(*Yield conditions. Tresca and von Mises criteria*).

Materiāla tecēšanas nosacījumi ir svarīgākais vispārējā trīs dimensiju stāvokļa jēdziens, kuru iegūst no viendimensiju slogojuma eksperimenta. Materiāla tecēšanas nosacījumi ir tādas matemātiskās sakarības starp sprieguma komponentēm materiāla iedomātā punktā, ar kuru palīdzību var noteikt plastisko

deformāciju rašanās sākumu šinī punktā. Vispārīgā veidā materiāla tecēšanas nosacījumus izsaka ar izteiksmi:

$$f(\sigma_{ij}) = C_Y \tag{5.3}$$

šeit C_Y ir noteikta (materiāla tecēšanas) konstante (*yield constant*), vai arī dažreiz pielieto izteiksmi:

$$f_i(\sigma_{ij}) = 0 \tag{5.4}$$

$f_i(\sigma_{ij})$ sauc par materiāla tecēšanas funkciju (*yield function*).

Izotropam materiālam tecēšanas nosacījumi ir neatkarīgi no koordināšu asu virzieniem un tādēļ tie ir funkcija no sprieguma invariantiem (*invariants of stress*), jeb kā alternatīva, ir simetriska funkcija no galveniem spriegumiem (*principal stress*).

Paskaidrojums. Sprieguma invarianti: no sprieguma komponentēm sastādītas sekojošas izteiksmes, kuru lielums nav atkarīgs no koordināšu sistēmas izvēles:

Pirmais invariants

$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$: vai arī citā veidā $(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$

Otrais invariants

$$\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2$$

vai arī $(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)$

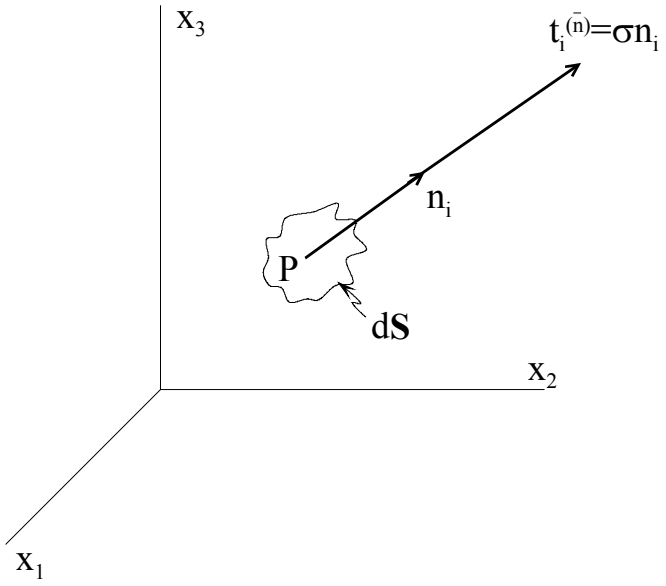
Trešais invariants

$$\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2$$

vai arī $(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)$

Galvenais spriegums – tas ir normālais spriegums, kas darbojas uz tā orientētu laukumiņu, kurā tangenciālie spriegumi ir vienādi ar nulli.

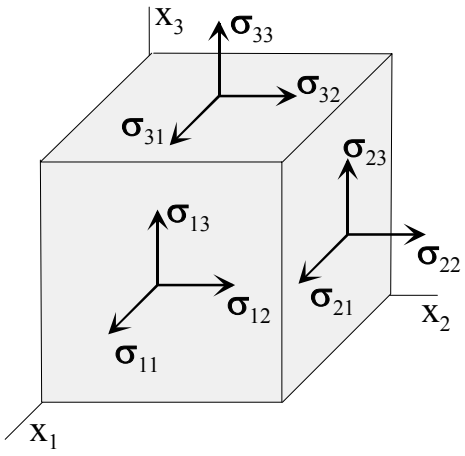
Literatūrā ir arī cits invarianta skaidrojums.



Punktā P sprieguma tenzora komponentes ir σ_{ij}, pēc vispārējās formulas $t_i^{(\bar{n})}=\sigma_{ji}n_j$ (a)

šeit $t_i^{(\bar{n})}=\lim\frac{\Delta f_i}{\Delta S}=\frac{df_i}{dS}$, n_j - virsmas normāle punktā P

Sprieguma tenzors $\left[\sigma_{ij}\right]=\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}\end{bmatrix}$



$(\sigma_{11},\sigma_{22},\sigma_{33})$ - normālie spriegumi (*normal stress*)

$(\sigma_{12},\sigma_{13},\sigma_{21},\sigma_{23},\sigma_{31},\sigma_{32})$ - bīdes spriegumi (*shear stress*)

$t_i^{(\bar{n})}=\sigma_{ji}n_j$

Priekš galveno spriegumu virziena ir izteiksme:

$t_i^{(\bar{n})}=\sigma n_i$ jeb $t^{(\bar{n})}=\sigma\bar{n}$ (b)

šeit σ , sprieguma vektora lielums, ir galvenā sprieguma lielums. Ievietojot (b) izteiksmē (a) un apzīmējot $n_i=\delta_{ij}n_j$ un $\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$, iegūst:

$$(\sigma_{ij}-\delta_{ij}\sigma)n_j=0$$

šeit n_i - virzienu kosinus, σ - galvenā sprieguma vērtība.

Šī vienādojuma risināšanā pie $n_j=0$ koeficientu determinants

$\left|\sigma_{ij}-\delta_{ij}\sigma\right|$ izzūd.

Formulējot:

$$\left|\sigma_{ij}-\delta_{ij}\sigma\right|=0 \text{ jeb } \begin{vmatrix}\sigma_{11}-\sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22}-\sigma & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}-\sigma\end{vmatrix}=0$$

kurš noved pie kubiska polinoma

$$\sigma^3-\mathrm{I}_\Sigma\sigma^2+\mathrm{II}_\Sigma\sigma-\mathrm{III}_\Sigma=0 \qquad (\text{c})$$

šeit $\mathrm{I}_\Sigma=\sigma_{ii}$, $\mathrm{II}_\Sigma=\frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj}-\sigma_{ij}\sigma_{ij})$, $\mathrm{III}_\Sigma=\left|\sigma_{ij}\right|$

sauc par pirmo, otro un trešo invariantu.

Vienādojuma (c) trīs saknes ir telpiska spriegumstāvokļa trīs galvenie spriegumi. *Paskaidrojuma beigas.*

Tādā veidā (4.3) var rakstīt sekojoši:

$$f_2(\sigma_{\mathrm{I}},\sigma_{\mathrm{II}},\sigma_{\mathrm{III}})=C_Y \qquad (5.5)$$

Bez tam, pie vidēji liela hidrostatiskā sprieguma iespējams materiāla tecēšanas nosacījumu uzrādīt kā funkciju no sprieguma deviatora:

$$f_3(\mathrm{II}_{\sum D},\mathrm{III}_{\sum D})=0 \qquad (5.6)$$

Sprieguma deviators $\begin{pmatrix} \sigma_{11}-\sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}-\sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}-\sigma \end{pmatrix}$

$$\sigma=\frac{1}{3}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})$$

Priekš izotropiem materiāliem ir divas samērā vienkāršas un pietiekoši precīzas matemātiskas metodes tecēšanas robežas noteikšanai.

Tās ir:

1. *Tresca* materiālu tecēšanas nosacījums (maksimālā bīdes teorija).
   (Tresca yield condition. (Maximum Shear Theory)).

Šis nosacījums izvirza pieņēmumu, ka tecēšana notiek, kad bīdes sprieguma maksimums sasniedz noteiktu C_Y vērtību. Matemātiski nosacījums ir noteikts tā vienkāršākā formā, ja to izsaka ar galveniem spriegumiem. Priekš $\sigma_{\mathrm{I}}>\sigma_{\mathrm{II}}>\sigma_{\mathrm{III}}$ *Tresca* materiāla tecēšanas nosacījums ir:

$$\frac{1}{2}(\sigma_{\mathrm{I}}-\sigma_{\mathrm{III}})=C_Y \quad \text{(konstante)} \qquad (5.7)$$

Attiecībā uz tecēšanas konstanti C_Y var izdarīt secinājumu no tecēšanas sprieguma pie vienkāršas stiepes C_Y : vienkāršā stiepē pie tecēšanas robežas

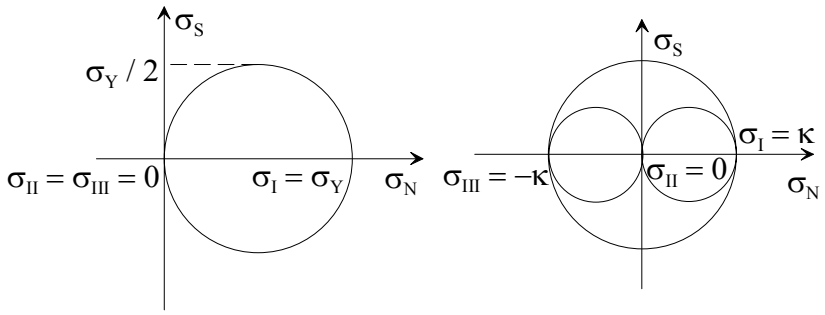
eksperimentos ir novērots bīdes maksimums $C_Y/2$ (Mora aplis zīm.5.3a).

Tādēļ, izmantojot materiāla tecēšanas spriegumu pie vienkāršas stiepes, *Tresca* materiāla tecēšanas nosacījums ir:

$$\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{III}} = \sigma_Y \qquad (5.8)$$

Tecēšanas robeža (jeb plastiskuma robeža) (*yield point*) priekš spriegumstāvokļa tad ir tā sauktā tīrā bīde (*pure shear*), kura ir vispāratzītā tecēšanas konstante C_Y . Tādā veidā tīrā bīdes tecēšanas robežas vērtība ir k , tecēšanas konstante C_Y ir līdzīga, atbilstoša k (vēlreiz Mora aplis paskaidro šo rezultātu, zīm.5.3b) un *Tresca* materiāla tecēšanas kritēriju var rakstīt sekojoši:

$$\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{III}} = 2k \qquad (5.9)$$



a) vienkārša stiepe b) tīra bīde

Zīmējums 5.3. Mora aplis pie materiāla tecēšanas.

2. *Mises* materiāla tecēšanas nosacījums (enerģijas izkliedēšanas teorija).

(*Mises yield condition (Distirtion Energy Theory)).*

Šis nosacījums apgalvo, ka tecēšana notiek, kad sprieguma otrā invarianta deviators sasniedz noteiktu vērtību.

Mises materiāla tecēšanas nosacījuma matemātiskā izteiksme ir:

$$-\mathrm{II}_{\sum D} = C_Y \qquad (5.10)$$

kuru var rakstīt,izmantojot galvenos spriegumus, sekojoši:

$$\left(\sigma_{\mathrm{I}}-\sigma_{\mathrm{II}}\right)^2+\left(\sigma_{\mathrm{II}}-\sigma_{\mathrm{III}}\right)^2+\left(\sigma_{\mathrm{III}}-\sigma_{\mathrm{I}}\right)^2=6C_Y \qquad (5.11)$$

Izmantojot tīrās stiepes eksperimenta tecēšanas spriegumu, iegūst:

$$\left(\sigma_{\mathrm{I}}-\sigma_{\mathrm{II}}\right)^2+\left(\sigma_{\mathrm{II}}-\sigma_{\mathrm{III}}\right)^2+\left(\sigma_{\mathrm{III}}-\sigma_{\mathrm{I}}\right)^2=2\sigma_Y^2 \qquad (5.12)$$

Ņemot vērā tīrās bīdes tecēšanas vērtību k , no (5.11) iegūst izteiksmi:

$$\left(\sigma_{\mathrm{I}}-\sigma_{\mathrm{II}}\right)^2+\left(\sigma_{\mathrm{II}}-\sigma_{\mathrm{III}}\right)^2+\left(\sigma_{\mathrm{III}}-\sigma_{\mathrm{I}}\right)^2=6k^2 \qquad (5.13)$$

5.4. Sprieguma telpa. π - plakne. Tecēšanas virsma.

(*Stress space. The* π *- plane. Yield surface*).

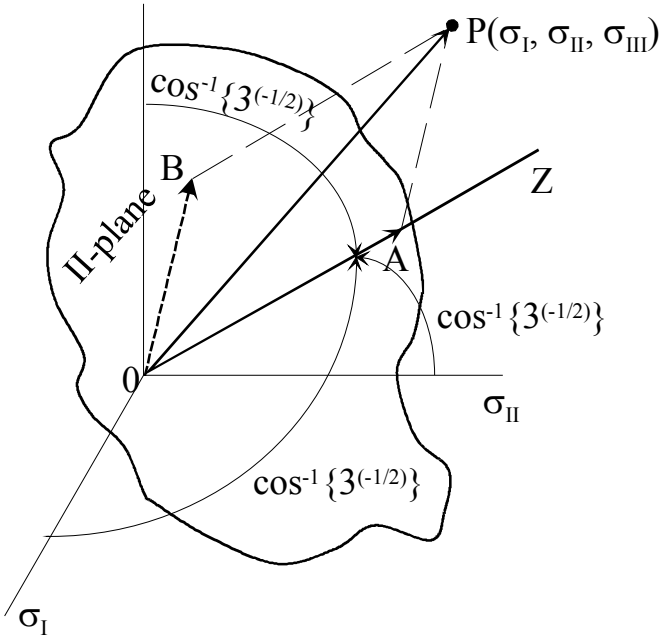
Jēdziens - sprieguma telpa tiek apskatīts kā sprieguma lielumu mērs atkarībā no attāluma gar koordinātu asīm. *Haigh – Westergaard* sprieguma telpā, zīm.5.4, koordinātu asis ir vērstas galveno spriegumu virzienā. Šīs telpas katrs punkts atbilst kādam spriegumstāvoklim un kāda konkrēta punkta stāvokļa (pozīcijas) vektora $P\left(\sigma_{\mathrm{I}},\sigma_{\mathrm{II}},\sigma_{\mathrm{III}}\right)$ komponentei OA gar līniju OZ, kura sastāda noteiktus leņķus ar koordinātu asīm, un komponentei OB plaknē (kuru sauc par π - plakni), kura ir perpendikulāra OZ un šķērso koordinātu sākumpunktu. Komponente gar OZ ir tāda, kurai $\sigma_{\mathrm{I}}=\sigma_{\mathrm{II}}=\sigma_{\mathrm{III}}$, un kura attēlo, jeb dod, hidrostatisko spriegumu, komponente π - plaknē attēlo, jeb pārstāv, spriegumstāvokļa deviatora daļu.

π - plaknes vienādojums ir:

$$\sigma_{\mathrm{I}}+\sigma_{\mathrm{II}}+\sigma_{\mathrm{III}}=0 \qquad (5.14)$$

Materiāla tecēšanas nosacījums $f_2\left(\sigma_{\mathrm{I}},\sigma_{\mathrm{II}},\sigma_{\mathrm{III}}\right)=C_Y$ (5.5) sprieguma telpā tiek definēts kā virsma, tā saucamā materiāla tecēšanas virsma (*yield surface*). Tā kā tecēšanas nosacījums ir neatkarīgs no hidrostatiskā sprieguma,

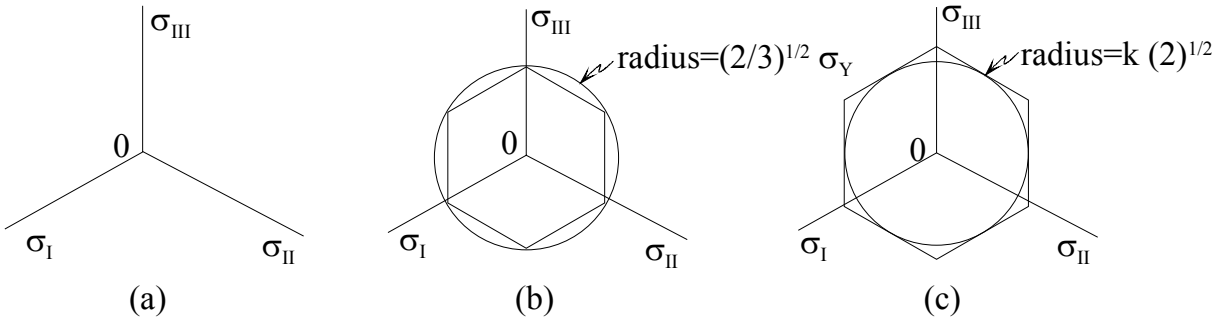
materiāla tecēšanas virsma ir cilindrs, paralēls OZ. Sprieguma punkti, kas atrodas uz cilindriskās tecēšanas virsmas, attēlo (t.i. pārstāv) elastiskā sprieguma stāvokli, tie, kas neatrodas uz šīs virsmas, attēlo (t.i. pārstāv) plastiskā sprieguma sākumstāvokli. Materiāla tecēšanas virsmas krustošanas punkti ar π - plakni veido materiāla tecēšanas līkni (*yield curve*).



*Z*īmējums 5.4. *Haigh-Westergaard* spriegumu telpa.

Īstajā π - plaknes attēlā, ja uz to skatās gar OZ virzienā uz sākumpunktu O, galveno spriegumu asis parādās izvietotas simetriski 120 grādu leņķī (skat. zīm. 5.5a).

Materiāla tecēšanas līknes pēc *Tresca* un *Mises* tecēšanas nosacījumiem parādās π - plaknē izskatā, kā uzrādīts zīm.5.5b un zīm.5.5c. *Z*īm.5.5b, kura līknes atbilst izteiksmēm (5.7) un (5.11), noder kā pamats tecēšanas sprieguma (t.i. tecēšanas robežas) noteikšanai tīrā stiepē. Gadījumā, kad *Mises* riņķa radiuss ir $\sqrt{2/3}\,\sigma_Y$, tad redzams ar riņķa līniju apvilkts regulārs *Tresca* sešstūris. *Z*īm.5.5c divas tecēšanas līknes pamatojas uz materiāla tecēšanas spriegumu k pie tīrās bīdes. Šeit *Mises* riņķis ir iezīmēts *Tresca* sešstūrī.



Zīmējums 5.5. Materiāla tecēšanas līknes pēc *Tresca* un *Mises* nosacījumiem.

Jebkura sprieguma punkta $P(\sigma_{\mathrm{I}},\sigma_{\mathrm{II}},\sigma_{\mathrm{III}})$ projekcijas atrašanās vieta π - plaknē ar katru sprieguma telpas asi veido leņķi $\cos^{-1}\sqrt{2/3}$. Tādā veidā projecētā deviatora komponentes ir: $\sqrt{2/3}\,\sigma_{\mathrm{I}}$, $\sqrt{2/3}\,\sigma_{\mathrm{II}}$, $\sqrt{2/3}\,\sigma_{\mathrm{III}}$

5.5. Materiāla izturēšanās pēc tecēšanas sākšanās. Izotropiskā un kinemātiskā stiprināšana.

(*Post – yield behavior. Isotropic and kinematic hardening*).

Nepārtraukts turpmākais slogojums pēc materiāla tecēšanas sākuma ir noteicošais faktors plastiskai deformācijai, kura savukārt ir saistīta ar pārmaiņām tecēšanas virsmā. Pieņemot, ka materiāls ir pilnīgi plastisks (*perfectly plastic)* tecēšanas virsma nemainās plastisko deformāciju laikā. Tas atbilst viendimensijas pilnīgi plastiskam gadījumam, kas attēlots zīm.5.2a. Priekš materiāla, kas deformējoties nostiprinās (*strain hardening material*), plastiskā deformācija ir galvenais faktors priekš tecēšanas virsmas. Izmaiņu novērtēšanai ir nepieciešama tecēšanas funkcija $f_1(\sigma_{ij})$ (5.4), lai noteiktu vispārējo tecēšanas virsmu pēc tecēšanas sākuma. Šim nolūkam ir ieteicama slogojuma funkcija (*loading function*):

$$f_1^*(\sigma_{ij},\varepsilon_{ij}^P,K)=0 \qquad (5.15)$$

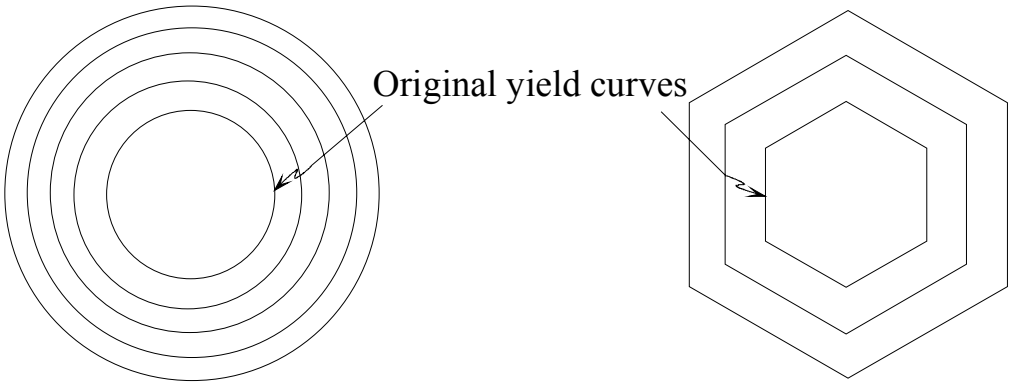
kura ir atkarīga ne tikai no sprieguma, bet arī no plastiskās deformācijas ε_{ij}^{P} un no materiāla stiprināšanas īpašībām, kuras izsaka ar parametru K . Izteiksme (5.15) tiek definēta kā slogojuma virsma, ja $f_1^*=0$, tad šī virsma ir tecēšanas virsma, ja $f_1^*<0$, tad šī virsma ir elastības apgabals tecēšanas virsmas iekšpusē un pie $f_1^*>0$ tā eksistē ārpus tecēšanas virsmas , tad tai nav nozīmes. Diferencējot (5.15) iegūst:

$$df_1^*=\frac{\partial f_1^*}{\partial \sigma_{ij}}d\sigma_{ij}+\frac{\partial f_1^*}{\partial \varepsilon_{ij}^{P}}d\varepsilon_{ij}^{P}+\frac{\partial f_1^*}{\partial K}dK \qquad (5.16)$$

Ja $f_1^*=0$ un $\left(\partial f_1^*/\partial \sigma_{ij}\right)d\sigma_{ij}<0$, tad tas ir gadījums, kad slodze samazinās (atslogošana) (*unloading*), pie $f_1^*=0$ un $\left(\partial f_1^*/\partial \sigma_{ij}\right)d\sigma_{ij}=0$, tad nav slodzes (*neutral loading*), ja $f_1^*=0$ un $\left(\partial f_1^*/\partial \sigma_{ij}\right)d\sigma_{ij}>0$, tad tas ir slodzes pielikšanas gadījums (*loading*). Veids, ar kādu plastiskā deformācija ε_{ij}^{P} tiek ierakstīta funkcijā (5.15), kad slogojuma gadījums ir definēts kā stiprināšanas noteikums, nosaka vienu no diviem materiāla stiprināšanas veidiem.

Pieņēmums par izotropisko stiprināšanu (*isotropic hardening*) materiāla noslogotā stāvoklī tiek formulēts kā tecēšanas virsmas vienkāršs pieaugums pēc lieluma saglabājot sākotnējo formu. Tādā veidā tecēšanas līkne π - plaknē pēc

Mises un *Tresca* nosacījumiem ir koncentrisks aplis un regulārs sešstūris (zīm.5.6).



a) *Mises* apļi b) *Tresca* sešstūris

Zīmējums 5.6. Tecēšanas līknes pie materiāla izotropiskas stiprināšanas.

Pie kinemātiskās stiprināšanas (*kinematic hardening*) tecēšanas sākuma virsma tiek pārvietota uz citu vietu sprieguma telpā ar lieluma vai formas izmaiņu. Tādā veidā sākuma tecēšanas virsma (5.4) tiek aizvietota ar izteiksmi:

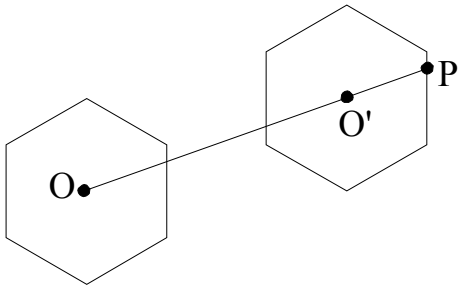
$$f_1(\sigma_{ij}-a_{ij})=0 \qquad (5.17)$$

Šeit a_{ij} ir jaunās tecēšanas virsmas centra koordinātes. Ja ir pieņemta lineāra stiprināšana (*linear hardening*), tad:

$$\dot{\sigma}_{ij}=c\dot{\varepsilon}_{ij}^{P} \qquad (5.18)$$

šeit c ir konstante.

Viendimensijas gadījumā *Tresca* tecēšanas līkne tiek pārvietota tā, kā redzams zīm.5.7.



Zīmējums 5.7. *Tresca* stiprināšanas līknes pie materiāla kinemātiskās stiprināšanas.

5.6. Plastiskuma sprieguma–deformāciju vienādojums. Plastiskuma potenciālā teorija.

(*Plastic stress-strain equations. Plastic potential theory*).

Ja plastiskā deformācija ir iesākta, tad sākotnējie elastības vienādojumi vairs nav spēkā. Tā kā plastiskā deformācija ir pilnīgi atkarīga no materiāla slogojuma vēstures, tad plastiskuma sprieguma–deformāciju attiecības izsaka kā deformāciju pieauguma attiecības, tā ir tā saucamā pieauguma teorija (*incremental theories*). Neņemot vērā elastīgo daļu un pieņemot, ka galvenās deformāciju asis deformācijai pieaugot sakrīt ar galveno spriegumu asīm, *Levy – Mises* vienādojums parāda vispārējo deformācijas pieaugumu ar sprieguma deviatoru sekojošā izteiksmē:

$$d\varepsilon_{ij}=s_{ij}d\lambda \qquad (5.19)$$

Spriegums deviators:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11}-\sigma_M & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}-\sigma_M & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}-\sigma_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_M=\frac{1}{3}\left(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}\right)$$

Šeit proporcionalitātes koeficients $d\lambda$ parādās diferenciālā formā, uzsverot to, ka deformācijas pieaugums ir saistīts ar pašreizējām (momentānām) galīgā sprieguma komponentēm. Koeficients $d\lambda$ var būt laikā mainīga slodze un tādēļ tas ir skalārs reizinātājs un nevis fiksēta konstante. Izteiksme (5.19) ir tecēšanas nosacījums (*flow rule*) priekš absolūti plastiska materiāla.

Deformācijas pieaugums ir tās dalīšanās elastīgā un plastiskā daļās saskaņā ar izteiksmi:

$$d\varepsilon_{ij}=d\varepsilon_{ij}^{E}+d\varepsilon_{ij}^{P} \tag{5.20}$$

un plastiskās daļas pieaugums ir saistīts ar sprieguma deviatora komponentēm sekojošā veidā:

$$d\varepsilon_{ij}=s_{ij}d\lambda \tag{5.21}$$

un radušos vienādojumus sauc par *Prandtl – Reuss* vienādojumiem.

Izteiksme (5.21) atbilst elastīgi-pilnīgi plastiska materiāla (*elastic – perfectly plastic material*) tecēšanas nosacījumam.

Sakarību nodrošināšana starp plastiskās deformācijas pieaugumu un pašreizējo (momentāno) sprieguma deviatoru nav būtiski atkarīga no deformācijas pieauguma lieluma.

Termins "plastiskuma potenciāla funkcija" (*plastic potential function*) tiek dots tādai sprieguma komponenšu funkcijai $g(\sigma_{ij})$, priekš kuras:

$$d\varepsilon_{ij}^{P}=\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}d\lambda \tag{5.22}$$

Priekš tā sauktā stabili plastiskā materiāla tāda funkcija eksistē un ir identiska (t.i. vienāda) ar tecēšanas funkciju. Bez tam, ja tecēšanas funkcija ir $f_1(\sigma_{ij})=\mathrm{II}_{\sum D}$, tad no (5.22) iegūst *Prandtl – Reuss* vienādojumu (5.21).

5.7. Ekvivalentais spriegums. Ekvivalentais plastiskās deformācijas pieaugums.

(*Equivalent stress. Equivalent plastic strain increment*).

Pie deformāciju stiprināšanas noteikumu matemātiskā formulējuma noteikšanas ir noderīgs termins "ekvivalentais jeb efektīvais spriegums" (*equivalent or effective stress*):

$$\sigma_{EQ}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\left[(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2+(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2\right]+6(\sigma_{12}^2+\sigma_{23}^2+\sigma_{31}^2)\right\}^{1/2} \tag{5.23}$$

Šo vienādojumu kompaktā (t.i. saspiestā) formā var rakstīt:

$$\sigma_{EQ}=\sqrt{3s_{ij}\,s_{ij}/2}=\sqrt{3\mathrm{II}_{\Sigma D}} \tag{5.24}$$

Līdzīgā veidā, ekvivalentais jeb efektīvais plastiskās deformācijas pieaugums (*equivalent or effective plastic strain encrement*) $d\varepsilon^{P}_{EQ}$ ir:

$$d\varepsilon^{P}_{EQ}=\left\{\frac{2}{9}\left[\left(d\varepsilon^{P}_{11}-d\varepsilon^{P}_{22}\right)^2+\left(d\varepsilon^{P}_{22}-d\varepsilon^{P}_{33}\right)^2+\left(d\varepsilon^{P}_{33}-d\varepsilon^{P}_{11}\right)^2\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{4}{3}\left[\left(d\varepsilon^{P}_{12}\right)^2+\left(d\varepsilon^{P}_{23}\right)^2+\left(d\varepsilon^{P}_{31}\right)^2\right]\right\}^{1/2} \tag{5.25}$$

jeb kompaktā formā:

$$d\varepsilon^{P}_{EQ}=\sqrt{\frac{2}{3}d\varepsilon^{P}_{ij}\,d\varepsilon^{P}_{ij}} \tag{5.26}$$

Izmantojot ekvivalentā sprieguma un deformācijas pieauguma izteiksmes, kas attiecīgi definētas ar (5.24) un (5.25) no (5.21) priekš $d\lambda$ iegūst:

$$d\lambda=\frac{3}{2}\,\frac{d\varepsilon^{P}_{EQ}}{\sigma_{EQ}} \tag{5.27}$$

5.8. Plastiskuma darbs. Deformāciju–stiprināšanas hipotēzes.

(*Plastic work. Strain – hardening hypotheses*).

Sprieguma veiktā darba lielums jeb spriegums jauda (*stress power)* ir $\sigma_{ij} D_{ij}$, attiecināts uz vienu tilpuma vienību.

Šeit $D_{ij}=D_{ji}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right); \quad v_i=\frac{dx_i}{dt}$ ir simetrisks tenzors, kuru sauc par deformācijas tenzora normu (*rate of deformations tensor*). Citi šī tenzora nosaukumi ir: deformācijas norma, deformācijas ātruma tenzors (*rate of strain, stretching, strain rate, velocity strain tensor*).

Tā kā $d\varepsilon_{ij}=D_{ij}dt$, tad darba pieaugums uz tilpuma vienību ir:

$$dW=\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \tag{5.28}$$

un, ņemot vērā (5.20), priekš sašķelšanas ir iespējams:

$$dW=\sigma_{ij}\left(d\varepsilon_{ij}^{E}+d\varepsilon_{ij}^{P}\right)=dW^{E}+dW^{P} \tag{5.29}$$

Priekš plastiski nesaspiežama materiāla plastiskuma darba pieaugums ir:

$$dW^{P}=\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^{P}=s_{ij} d\varepsilon_{ij}^{P} \tag{5.30}$$

Bez tam, ja tas pats materiāls atbilst *Prandtl – Reuss* vienādojumam (5.21), plastiskā darba pieaugumu var izteikt sekojoši:

$$dW^{P}=\sigma_{EQ} d\varepsilon_{EQ}^{P} \tag{5.31}$$

un (5.21) var pārrakstīt sekojošā formā:

$$d\varepsilon_{ij}^{P}=\frac{3}{2}\frac{dW^{P}}{\sigma_{EQ}^{2}} s_{ij} \tag{5.32}$$

Šīs ir divas vērā ņemamas hipotēzes, pēc kurām var aprēķināt materiāla tecēšanas spriegumu pie materiāla nostiprināšanās izotropiskā deformācijā *(isotropic strain hardening)*. Zinot darba–stiprināšanas hipotēzi (*work–*

hardening hypotesis), pieņem, ka esošā tecēšanas virsma ir atkarīga tikai no kopējā plastiskā darba. Kopējo (*total*) plastisko darbu raksta kā integrālu:

$$W^P = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^P \tag{5.33}$$

un tecēšanas kritēriju izsaka ar vienādojumu:

$$f_1(\sigma_{ij}) = F(W^P) \tag{5.34}$$

kura precīzo funkcionālu nepieciešams noteikt eksperimentāli.

Otrajā stiprināšanas hipotēzē, kuru sauc par deformācijas–stiprināšanas hipotēzi (*strain–hardening hypothesis*), pieņem, ka materiāla stiprināšana ir funkcija no plastiskās deformācijas daudzuma. Kopējā ekvivalentā deformācija:

$$\varepsilon_{EQ}^P = \int d\varepsilon_{EQ}^P \tag{5.35}$$

Šīs stiprināšanas daudzums (jeb norma) tiek izteikts ar vienādojumu:

$$f_1(\sigma_{ij}) = \mathrm{H}(\varepsilon_{EQ}^P) \tag{5.36}$$

priekš kura funkcionālu nosaka materiāla lineāra spriegumstāvokļa eksperimentā (*uniaxial stress-strain tests*) (lineārs spriegumstāvoklis–spriegumstāvoklis, kas rodas pie vienkāršas stiepes vai spiedes). Priekš *Mises* stiprināšanas kritērija tā vienādojumā ieved stiprināšanas normu (daudzumu) pēc (5.34) un (5.36).

5.9. Vispārējās deformācijas teorija.

(*Total deformation theory*).

Pretēji plastiskās deformācijas pieauguma teorijai (*incremental theory*), kura izteikta sprieguma – deformāciju pieauguma vienādojumos (5.19) un (5.21), tā saucamā *Hencky* vispārējā deformācijas teorija (*total deformation theory of Hencky*) attiecas uz spriegumu un vispārējo deformāciju. Šie vienādojumi ir:

$$e_{ij} = \left(\Phi + \frac{1}{2} G \right) s_{ij} \qquad (5.37)$$

$$\varepsilon_{ij} = (1 - 2\upsilon)\sigma_{ii} / \mathrm{E} \qquad (5.38)$$

e, ε - skat. (5.1), (5.2)

Ekvivalentā sprieguma un deformācijas terminos parametru Φ izsaka:

$$\Phi = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_{EQ}^{P}}{\sigma_{EQ}} \qquad (5.39)$$

šeit $\varepsilon_{EQ}^{P} = \sqrt{2 \varepsilon_{ij}^{P} \varepsilon_{ij}^{P} / 3}$

$$\varepsilon_{ij}^{P} = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_{EQ}^{P}}{\sigma_{EQ}} s_{ij} \qquad (5.40)$$

5.10. Elastoplastiskās problēmas.

(Elastoplastic problems)

Situāciju, kad ķermenis uz slodzi atsaucas (reaģē) gan ar elastīgo deformāciju gan ar plastisko deformāciju, sauc par elasto–plastisko problēmu. Šeit pieskaitāmi tādi uzdevumi kā stieņu teorija, vārpstu vērpe, biezu sienu cauruļu un sfērisku objektu izturēšanās pie spiediena. Galvenās formulas priekš elastīgā, plastiskā apgabaliem un elastoplastiskām sakarībām ir:

a) elastības apgabalā:

1. Līdzsvara vienādojumi

$$\sigma_{ij,j}+\rho b_i=0$$

ρ - materiāla blīvums, $\rho b_i=p_i$

Ķermeņa spēks (*body forces*) ir gravitācijas vai inerces spēks, to apzīmē ar simbolu b_i (masas vienības spēks), vai kā p_i (tilpuma vienības spēks).

2. Sprieguma – deformācijas attiecības

$$\sigma_{ij}=\frac{\mathrm{E}}{1+\upsilon}\left(\varepsilon_{ij}+\frac{\upsilon}{1-2\upsilon}\delta_{ij}\varepsilon_{kk}\right)$$

vai otrādi $\varepsilon_{ij}=\frac{1+\upsilon}{\mathrm{E}}\sigma_{ij}-\frac{\upsilon}{\mathrm{E}}\delta_{ij}\sigma_{kk}$

šeit υ - Puassona koeficients, E - materiāla elastības modulis, $\varepsilon_{kk}=\mathrm{I}_\mathrm{E}$, $\sigma_{kk}=\mathrm{I}_\Sigma$ sprieguma invarianti.

3. Robežnosacījumi spriegumiem vai pārvietojumiem.

4. Savienojamības (atbilstības) nosacījumi (*compatibility conditions*)

b) plastiskā apgabalā:

1. Līdzsvara nosacījumi

$$\sigma_{ij,j}+\rho b_i=0$$

2. Sprieguma – deformāciju pieauguma attiecības

$$d\varepsilon_{ij}^{P}=s_{ij}d\lambda \quad \text{(skat. (5.21))}$$

3. Tecēšanas nosacījumi

$$\sigma_{\mathrm{I}}-\sigma_{\mathrm{III}}=\sigma_Y \qquad (5.8)$$

vai $$(\sigma_{\mathrm{I}}-\sigma_{\mathrm{II}})^2+(\sigma_{\mathrm{II}}-\sigma_{\mathrm{III}})^2+(\sigma_{\mathrm{III}}-\sigma_{\mathrm{I}})^2=6C_Y \qquad (5.11)$$

4. Robežnosacījumi plastiskām attiecībām, ja tie eksistē

c) elastīgi – plastiskās attiecības

Spriegumu un pārvietojumu nepārtrauktības attiecības.

6. Lineāri viskozā elastība.

(Linear Viscoelasticity)

6.1. Lineāri viskozās attiecības.

(Linear viscoelastic behavior)

Elastīgs ciets ķermenis un viskozs šķidrums atšķiras viens no otra ar savām deformāciju īpašībām. Elastīgi deformēts ciets ķermenis pēc slodzes noņemšanas tiecas ieņemt savu sākotnējo nedeformēto formu. Viskozam šķidrumam nav tendences uz pilnīgu atgriešanos nedeformētā sākotnējā stāvoklī. Tātad, elastības spriegums ir tieši saistīts ar deformāciju, turpretim spriegums viskozā šķidrumā ir atkarīgs (izņemot hidrostatisko komponenti) no deformāciju ātruma.

Materiāla izturēšanos aprakstošās attiecības, kurās iekļautas gan elastīgas, gan viskozas īpašības, sauc par viskozi elastīgām attiecībām. Elastīgs ciets ķermenis (pēc Huka likuma) un viskozs šķidrums (pēc Ņūtona) ir divi pretēji galēji punkti viskozi elastīgo attiecību spektrā. Lai gan viskozi elastīgs materiāls ir jūtīgs pret temperatūras izmaiņām, tā īpašību apspriešanā ievēro izotermālo noteikumu ierobežojumus un formulās temperatūra ieiet tikai kā parametrs.

6.2. Vienkārši viskozi elastīgi modeļi.

(Simple viscoelastic models)

Lineāro viskozo elastību ir iespējams ērti ieviest apskatot viendimensiju mehānisku modeli, kas attēlo deformāciju lielumu izmaiņu dažādiem viskozi elastīgiem materiāliem. Materiāla elements kā modelis tiek aprakstīts ar lineārās elastības konstanti E un kā viskozs amortizators ar viskozitātes koeficientu η. Kā redzams zīm.6.1, no pieliktās slodzes spriegums σ ir saistīts ar relatīvo pagarinājumu ε pēc sekojošas izteiksmes:

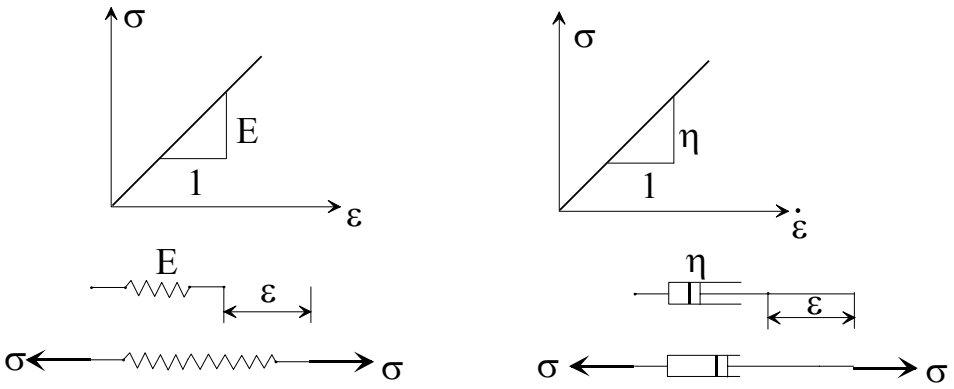
$$\sigma = \mathrm{E}\ \varepsilon \qquad (6.1)$$

un analoga izteiksme priekš amortizatora ir:

$$\sigma = \eta \ \dot{\varepsilon} \tag{6.2}$$

šeit $\dot{\varepsilon} = d\varepsilon / dt$

Modelis ir vispārināts un izmēru ietekme ir izslēgta, ieviešot σ kā spriegumu un ε kā deformāciju.



a) lineāra atspere b) viskozs amortizators

Zīmējums 6.1. Lineāri viskozās elastības viendimensijas modelis.

Maksvela (*Maxwell*) materiāla viskozās elastības modelis ir virknē saslēgtas atsperes un amortizatora kombinācija (zīm. 6.2a). Kelvina (*Kelvin*) jeb Fogta (*Voigt*) modelim ir paralēls sakārtojums (zīm. 6.2b). Spriegumu–deformāciju attiecības priekš Maksvela modeļa ir:

$$\frac{\dot{\sigma}}{\mathrm{E}} + \frac{\sigma}{\eta} = \dot{\varepsilon} \tag{6.3}$$

un priekš Kelvina modeļa:

$$\sigma = \mathrm{E}\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} \tag{6.4}$$

Šie vienādojumi ir svarīgākās viendimensiju viskozās elastības vienādojumu sastāvdaļas.

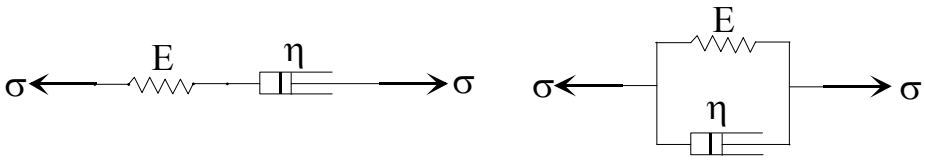
Ja nepieciešams vienādojumus rakstīt operatoru formā, izmantojot lineāro laika starpības (diferenciālo) operatoru (*linear differential time operator*)

$\partial_t \equiv \partial / \partial t$, tad no izteiksmes (6.3) iegūst:

$$\left(\partial_t / \mathrm{E} + 1/\eta\right)\sigma = \{\partial_t \}\varepsilon \tag{6.5}$$

un, izdalot operatoru iekavās, no (6.4) iegūst:

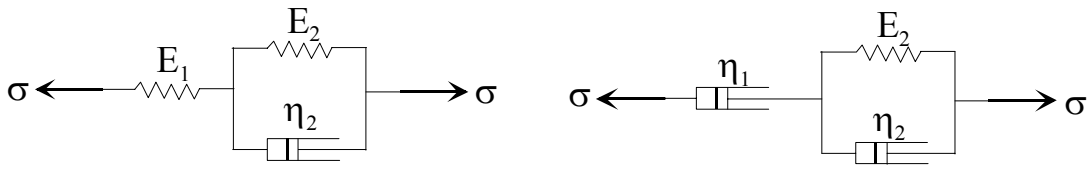
$$\sigma = \{\mathrm{E} + \eta\partial_t \}\varepsilon \tag{6.6}$$



a) Maxwell b) Kelvin

Zīmējums 6.2. *Maxwell* un *Kelvin (Voigt)* materiāla viskozās elastības modeļi.

Vienkārši Kelvina un Maksvela modeļi nav pietiekami atbilstoši pilnīgām attiecībām reālos materiālos. Daudz pilnīgākus modeļus iegūst ņemot vērā lielāku elastību pie faktisko materiālu reakciju attēlošanas. Trīs parametru modeļus veido no divām atsperēm un viena amortizatora (jeb demfera), to parasti sauc par standarta lineāru cietu ķermeni (*standard linear solid*) (zīm.6.3a). Trīs parametru viskozs modelis sastāv no diviem amortizatoriem un vienas atsperes (zīm.3b). Pirmajā gadījumā pie Kelvina modeļa tiek virknē pieslēgta atspere, otrā gadījumā – amortizators.

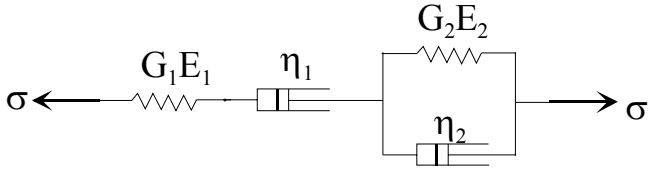


a) lineārs ciets ķermenis b) trīs parametru viskozs modelis

Zīmējums 6.3. Lineāru cietu ķermeņu trīsparametru modelis.

Četru parametru modelis sastāv no divām atsperēm un diviem amortizatoriem, t.i. virknē saslēgti Maksvela un Kelvina modeļi (zīm. 6.4). Eksistē šī modeļa vairākas ekvivalentas formas. Četru parametru modelis ir spējīgs atveidot (t.i. modelēt) visas trīs viskozās elastības pamatreakcijas:

momentānā elastības reakcija (*instantaneous elastic response*) ar to, ka ir brīvais elastīgums E_1 (šeit: momentānā atsperes konstante), viskozā plūstamība (*viscous flow*) ar amortizatora parametru η_1 , un, pēdējais, elastīgo reakciju kavēšana, aizturēšana (*delayed elastic response*) ar Kelvina elementu.



Zīmējums 6.4. Lineāru cietu ķermeņu četru parametru modelis.

Spriegumu–deformāciju vienādojumi priekš viena no trīs vai četru parametru modeļiem vispārīgā formā ir:

$$p_2\ddot{\sigma}+p_1\dot{\sigma}+p_0\sigma=q_2\ddot{\varepsilon}+q_1\dot{\varepsilon}+q_0\varepsilon \qquad (6.7)$$

Šeit koeficientus p_i un q_i iegūst no E un η kombinācijām un tie ir atkarīgi no modeļa elementu konkrētā sakārtojuma. Izteiksmi (7) operatoru formā raksta sekojoši:

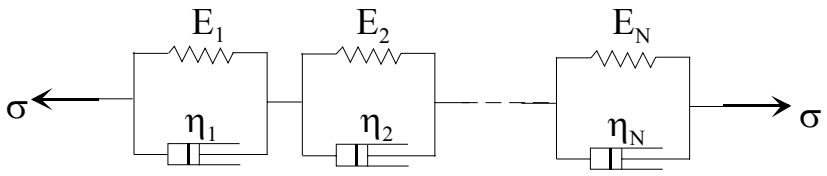
$$\left\{p_2\partial_t^2+p_1\partial_t+p_0\right\}\sigma=\left\{q_2\partial_t^2+q_1\partial_t+q_0\right\}\varepsilon \qquad (6.8)$$

6.3.Vispārinātais modelis. Lineārs diferenciāloperatoru vienādojums.

(*Linear differential operator equation*)

Vispārinātais Kelvina modelis (*generalized Kelvin model*) sastāv no virknē savienotiem (sakārtotiem) Kelvina elementiem (zīm.6.5). Šī modeļa kopējā deformācija ir vienāda ar atsevišķu Kelvina elementu deformāciju summu. No izteiksmes (6.6) sastāva iegūst izteiksmi operatoru formā:

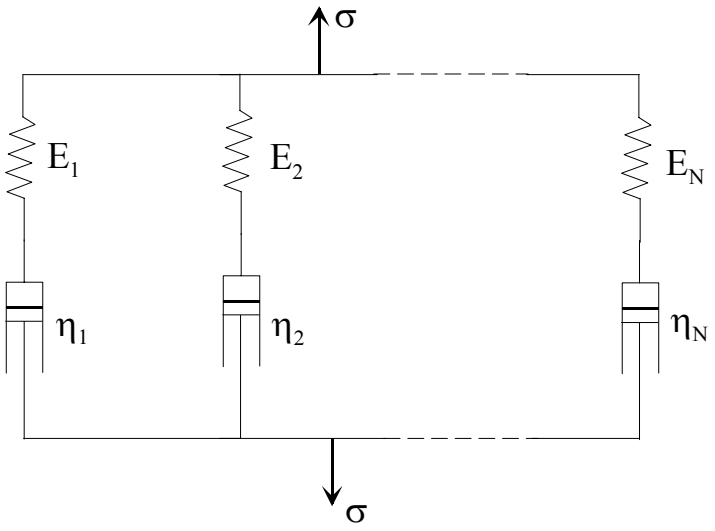
$$\varepsilon=\frac{\sigma}{\left\{E_1+\eta_1\partial_t\right\}}+\frac{\sigma}{\left(E_2+\eta_2\partial_t\right\}}+\ldots+\frac{\sigma}{\left\{E_N+\eta_N\partial_t\right\}} \qquad (6.9)$$



Zīmējums 6.5. Vispārinātais *Kelvin* modelis.

Analoģiski, no Maksvela elementu paralēlā sakārtojuma , kā parādīts zīm.6.6, tiek veidots Maksvela vispārinātais modelis (*generalized Maxwell model*). Šeit kopējais spriegums ir summa no katra šķērsām orientēta sprieguma elementā, no (6.5) iegūst:

$$\sigma=\frac{\dot{\varepsilon}}{\left\{\partial t/\mathrm{E}_1+1/\eta_1\right\}}+\frac{\dot{\varepsilon}}{\left\{\partial t/\mathrm{E}_2+1/\eta_2\right\}}+\ldots+\frac{\dot{\varepsilon}}{\left\{\partial t/\mathrm{E}_N+1/\eta_N\right\}} \qquad (6.10)$$



Zīmējums 6.6. Vispārinātais *Maxwell* modelis.

Priekš konkrētiem modeļiem (6.9) un (6.10) iegūst rezultējošo vienādojumu sekojošā formā:

$$p_0\sigma+p_1\dot{\sigma}+p_2\ddot{\sigma}+\ldots=q_0\varepsilon+q_1\dot{\varepsilon}+q_2\ddot{\varepsilon}+\ldots \qquad (6.11)$$

kuru var rakstīt saīsinātā veidā:

$$\sum_{i=0}^{m} p_i\frac{\partial^i\sigma}{\partial t^i}=\sum_{i=0}^{n} q_i\frac{\partial^i\varepsilon}{\partial t^i} \qquad (6.12)$$

Šo lineāro diferenciāloperatoru vienādojumu (*linear differential operator equation*) simbolu formā var rakstīt sekojoši:

$$\{P\}\sigma=\{Q\}\varepsilon \tag{6.13}$$

šeit operatori $\{P\}$ un $\{Q\}$ ir definēti sekojoši:

$$\{P\}=\sum_{i=0}^{m} p_i\frac{\partial^i}{\partial t^i} \qquad \{Q\}=\sum_{i=0}^{n} q_i\frac{\partial^i}{\partial t^i} \tag{6.14}$$

6.4. Šļūde un relaksācija.

(*Creep and relaxation*)

Viskozās elastības divi pamateksperimenti ir šļūdes un relaksācijas pārbaudes. Šīs pārbaudes veic kā viendimensiju sprieguma (spiedes) eksperimentu vai kā vienkāršu bīdes (cirpes) eksperimentu. Šļūdes eksperiments (*creep experiment*) sastāv no materiāla parauga momentānās noslogošanas ar spriegumu σ_0 un turpmākās konstanta sprieguma noturēšanas no šī laika tādā veidā, kamēr notiek deformācijas mērīšana (reaģēšana uz šļūdi–*creep response*) kā laika funkcija. Relaksācijas eksperimentā (*relaxation experiment*) momentānā deformācija ε_0 ir pielikta un materiāla paraugs tiek noturēts tādā stāvoklī kamēr mēra sprieguma izmaiņu kā funkciju no laika (relaksācija). Matemātiskā veidā šļūdes un relaksācijas slogojums tiek izteikts ar terminu–pakāpienvienības funkcija $[U(t-t_1)]$ (*unit step function*), kas ir definēta sekojoši (zīm.6.7):

$$[U(t-t_1)]=\{=0,t<t_1\ ;=1,t>t_1\} \tag{6.15}$$

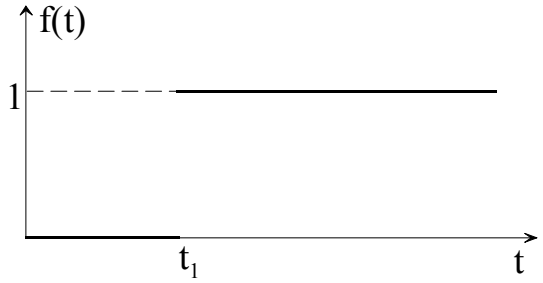
Priekš šļūdes slogojuma:

$$\sigma=\sigma_0[U(t)] \tag{6.16}$$

šeit $[U(t)]$ attēlo vienas vienības lielas pakāpes funkciju laikā $t_1=0$. Materiāla šļūdes reakciju pēc Kelvina nosaka ar diferenciālvienādojumu:

$$\dot{\varepsilon}+\frac{\varepsilon}{\tau}=\frac{\sigma_0[U(t)]}{\eta} \tag{6.17}$$

kuru iegūst izteiksmi (6.16) ievietojot izteiksmē (6.4).



Zīmējums 6.7. Pakāpienvienības funkcija pie šļūdes un relaksācijas.

Šeit $\tau=\eta/\mathrm{E}$ sauc par laika aizkavējumu (*retardation time*). Priekš nepārtrauktas laika funkcijas $f(t)$ ir spēkā izteiksme:

$$\int_{-\infty}^{t} f(t')[U(t'-t_1)]dt'=[U(t-t_1)]\int_{t_1}^{t} f(t')dt' \tag{6.18}$$

izmantojot (17) un to apvienojot ar Kelvina šļūdes reakcijas rezultātiem, iegūst:

$$\varepsilon(t)=\frac{\sigma_0}{\mathrm{E}}\left(1-e^{-t/\tau}\right)[U(t)] \tag{6.19}$$

Šļūdes slogojums kopā ar šļūdes reakciju, t.i. materiāla izturēšanos pie šļūdes, pēc Kelvina un Maksvela modeļiem ir attēlots zīm.6.8.

Ja deformāciju izsaka ar izteiksmi

$$\varepsilon=\varepsilon_0[U(t)] \tag{6.20}$$

tad sprieguma relaksācijas aprakstam Maksvela materiāliem (t.i. ja materiāla izturēšanos apraksta ar Maksvela modeli) izteiksmes (6.20) atvasinājumu pēc laika ievietojot izteiksmē (6.3) iegūst diferenciālvienādojumu:

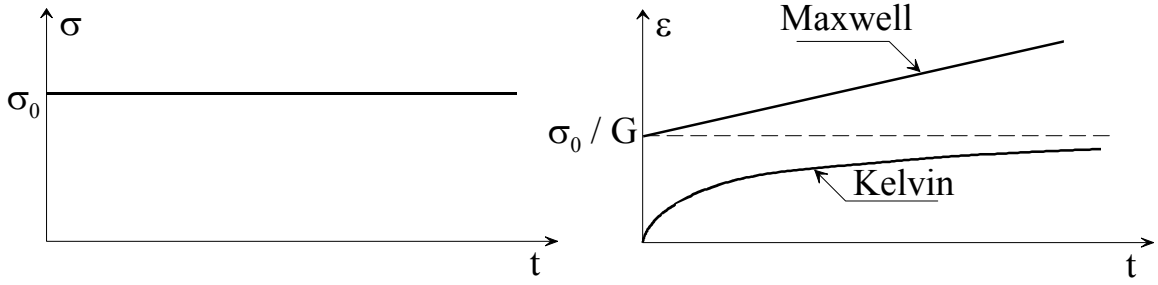
$$\dot{\sigma}+\sigma/\tau=\mathrm{E}\varepsilon_0[\delta(t)] \tag{6.21}$$

Šeit $[\delta(t)] = d[U(t)]/dt$ ir impulsa vienības funkcija, jeb Diraka (*Dirac*) delta funkcija. Saskaņā ar definīciju:

$$[\delta(t-t_1)]=0 \quad , \quad t\neq t_1 \tag{6.22a}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}[\delta(t-t_1)]dt=1 \tag{6.22b}$$

Šī funkcija ir vienāda ar nulli visur, izņemot pie $t=t_1$.



a) šļūdes slogojums b) šļūdes reakcija

Zīmējums 6.8. Materiāla izturēšanās pie šļūdes grafiskais attēlojums.

No nepārtrauktas funkcijas $f(t)$ pie $t>t_1$

$$\int_{-\infty}^{t} f(t')[\delta(t'-t_1)]dt' = f(t_1)[U(t-t_1)] \tag{6.23}$$

kopā ar (6.21) iegūst Maksvela sprieguma relaksācijas izteiksmi:

$$\sigma(t) = \mathrm{E}\varepsilon_0 e^{-t/\tau}[U(t)] \tag{6.24}$$

Sprieguma relaksāciju Kelvina materiālam iegūst ievietojot $\dot{\varepsilon}=\varepsilon_0[\delta(t)]$ izteiksmē (6.4) :

$$\sigma(t)=\mathrm{E}\varepsilon_0[U(t)]+\eta\varepsilon_0[\delta(t)] \tag{6.25}$$

6.5. Šļūdes funkcija. Relaksācijas funkcija. Pārmantošanas integrāls.

(*Creep function. Relaxation function. Hereditary integrals*).

Materiāla modeļa reakciju uz šļūdes slogojumu $\sigma=\sigma_0\left[U(t)\right]$ var uzrakstīt sekojošā formā:

$$\varepsilon(t)=\phi(t)\sigma_0 \tag{6.26}$$

Šeit $\phi(t)$ ir šļūdes funkcija (*creep function*). (Šļūdes funkcija ir šļūdes deformācijas ātrums). Piemēram, šļūdes funkcija vispārinātam Kelvina modelim zīm.5 ir noteikta no (6.19):

$$\phi(t)=\sum_{i=1}^{N} J_i\left(1-e^{-t/\tau_i}\right)\left[U(t)\right] \tag{6.27}$$

šeit $J_i=1/\mathrm{E}_i$ ir apzīmēts kā materiāla padevīgums (*compliance*).

Pie $N\to\infty$ iegūst:

$$\phi(t)=\int_0^{\infty} J(\tau)\left(1-e^{-t/\tau}\right)d\tau \tag{6.28}$$

Funkciju $J(\tau)$ sauc par aiztures (kavēšanas) laika sadalījumu (*distribution of retardation times*) jeb aiztures spektru (*retardation spectrum*).

Analoģiski kā pie šļūdes procesa sprieguma relaksāciju modeli, ņemot vērā, ka $\varepsilon=\varepsilon_0\left[U(t)\right]$, apraksta ar izteiksmi:

$$\sigma(t)=\Phi(t)\varepsilon_0 \tag{6.29}$$

Šeit $\Phi(t)$ ir apzīmēta kā relaksācijas funkcija (*relaxation function*) un vispārinātam Maksvela modelim pēc zīm.6.6 tiek noteikta no (6.24) sekojoši:

$$\Phi(t)=\sum_{i=1}^{N}\mathrm{E}_i e^{-t/\tau_i}\left[U(t)\right] \tag{6.30}$$

Pie $N \to \infty$ funkciju $\mathrm{E}(\tau)$ aizvieto ar konstanti (E_i, τ_i) un relaksācijas funkciju nosaka sekojoši:

$$\Phi(t) = \int_0^{\infty} \mathrm{E}(\tau) e^{-t/\tau} d\tau \qquad (6.31)$$

Funkciju $\mathrm{E}(\tau)$ sauc par relaksācijas laika sadalījumu (*distribution of relaxation times*), vai relaksācijas spektru (*relaxation spectrum*).

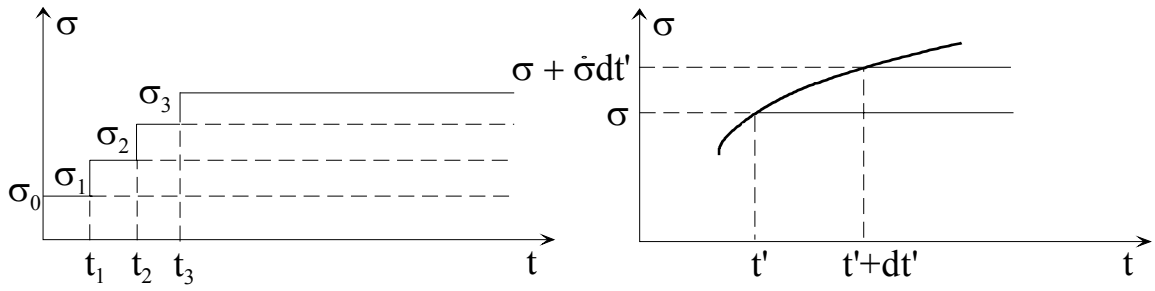
Lineārās viskozās elastības gadījumā ir spēkā superpozicijas princips. Tādēļ var teikt, ka rezultātu, jeb "seku" summa atbilst cēloņu summai. Tādējādi, ja materiālam priekš šļūdes funkcijas $\phi(t)$ iegūšanas sprieguma norises (t.i. pielikšanas "vēsturi") attēlo pakāpienveidā kā zīm.6.9a, tad šļūdes reakciju var noteikt ar izteiksmi:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \phi(t) + \sigma_1 \phi(t - t_1) + \sigma_2 \phi(t - t_2) + \sigma_3 \phi(t - t_3) = \sum_{i=0}^{3} \sigma_i \phi(t - t_i) \qquad (6.32)$$

Tādēļ patvaļīgu sprieguma pielikšanas "vēsturi", piemēram zīm.6.9b, var sadalīt atsevišķos mazos pakāpienveida slogojuma "soļos", no kuriem katra lielums ir $d\sigma$ un šļūdes reakciju iegūst ar superpozicijas integrālu (*the superposition integral*):

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{d\sigma(t')}{dt'} \phi(t - t') dt' \qquad (6.33)$$

Tādu integrālu sauc par "pārmantotības jeb iedzimtības" integrālu (*hereditary integrals*), ja deformācija laikā ir saistīta ar visu sprieguma pielikšanas "vēsturi".



Zīmējums 6.9. Superpozicijas princips pie materiāla šļūdes funkcijas iegūšanas.

Lai slogojuma sākumā materiālu "padarītu nejūtīgu" (*initially "dead"*), t.i. pilnīgi brīvu no sprieguma pie $t=0$, tad apakšējo robežu izteiksmē (33) jāaizvieto ar nulli un tad šļūdes reakciju izsaka sekojoši:

$$\varepsilon(t)=\int_0^t \frac{d\sigma(t')}{dt'}\phi(t-t')dt' \qquad (6.34)$$

Bez tam, ja slogojuma spriegums ir pielikts pie $t'=0$ kā pārtraukts, bet ievērojams lielums σ_0 , tad izteiksmi (6.34) raksta sekojoši:

$$\varepsilon(t)=\sigma_0\phi(t)+\int_0^t \frac{d\sigma(t')}{dt'}\phi(t-t')dt' \qquad (6.35)$$

Literatūrā bieži šīs summas pirmo locekli sauc par momentāno, jeb elastīgo deformāciju (pēc Huka likuma), otro locekli par šļūdes deformāciju, rakstot pilnās deformācijas vienādojumu sekojoši:

$$\varepsilon(\sigma,t)=\varepsilon_0(\sigma)+\varepsilon_{creep}(\sigma,t); \quad \varepsilon_0(\sigma)=\frac{\sigma_0}{E}$$

E - momentānais (sākotnējais) materiāla elastības modulis.

Apskatot šļūdes procesus visbiežāk pieņem, ka spriegums laikā ir const., bet tas var būt arī funkcija no laika, tad pie procesa attēlošanas ar superpozicijas

integrālu iesaista deformācijas "vēsturi" $\varepsilon(t)$ un relaksācijas funkciju $\Phi(t)$. Analoģiski izteiksmei (6.33), priekš sprieguma izmanto izteiksmi:

$$\sigma(t)=\int_{-\infty}^{t}\frac{d\varepsilon(t')}{dt'}\Phi(t-t')dt' \tag{6.36}$$

un kopā ar attiecībām par materiāla "nejūtīgumu" pie $t=0$, līdzīgi kā (6.34) un (6.35) attiecīgi var rakstīt:

$$\sigma(t)=\int_{0}^{t}\frac{d\varepsilon(t')}{dt'}\Phi(t-t')dt' \tag{6.37}$$

un

$$\sigma(t)=\varepsilon_0\Phi(t)+\int_{0}^{t}\frac{d\varepsilon(t')}{dt'}\Phi(t-t')dt' \tag{6.38}$$

Tā kā vai nu šļūdes integrāls (6.34) vai relaksācijas integrāls (6.37) ir dotā materiāla viskozās elastības raksturojoši lielumi, tad starp šļūdes funkciju $\phi(t)$ un relaksācijas funkciju $\Phi(t)$ pastāv savstarpējas attiecības. Šīs attiecības parasti nav viegli nosakāmas, bet tās var noteikt ar Laplasa transfomācijas definīciju:

$$\bar{f}(s)=\int_{0}^{\infty}f(t)e^{-st}dt \tag{6.39}$$

ir iespējams veikt $\bar{\phi}(s)$ un $\overline{\Phi}(t)$ pārveidošanu kopā ar vienādojumu:

$$\bar{\phi}(s)\overline{\Phi}(s)=1/s^2 \tag{6.40}$$

šeit s ir pārveidošanas (transformācijas) parametrs.

6.6. Saliktais modulis un padevīgums (piekāpība).

(*Complex moduli and compliances*)

Ja lineāri viskozi elastīga materiāla paraugs pārbaudē tiek pakļauts vienas dimensijas sprieguma slogojumam (stiepē vai bīdē) ar $\sigma = \sigma_0 \sin \omega t$, tad rezultātā konstatē deformāciju $\varepsilon = \varepsilon_0 \sin(\omega t - \delta)$, bet sinusveida reakcija ar tādu pašu frekvenci ω ir nobīdīta fāzē attiecībā pret spriegumu par atpaliekošu leņķi δ . Šinī gadījumā spriegumu un deformāciju var attēlot grafiski ar konstanta lieluma rotējoša vektora vertikālu projekciju, kura rotē ar konstantu leņķisku ātrumu ω , skat. zīm.6.10. Sprieguma un deformācijas amplitūdu attiecības tiek definētas kā absolūtais dinamiskais modulis (*absolute dynamic modulus*) σ_0 / ε_0 un absolūtais dinamiskais padevīgums (*absolute dynamic compliance*).

Saskaitot rotējošā vektora sprieguma un deformācijas komponentes pēc ieejas fāzes un izejas fāzes, var definēt, skat. zīm.6.10a :

a) uzkrāšanās (atmiņas) modulis *(the storage modulus*)

$$E_1 = \frac{\sigma_0 \cos\delta}{\varepsilon_0}$$

b) zudumu (jeb samazināšanās) modulis (*the loss modulus*)

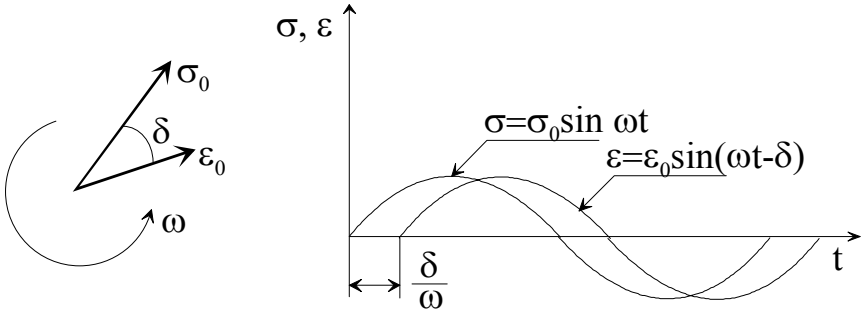
$$E_2 = \frac{\sigma_0 \sin\delta}{\varepsilon_0}$$

c) uzkrāšanās padevīgums (*the storage compliance*)

$$J_1 = \frac{\varepsilon_0 \cos\delta}{\sigma_0}$$

d) zudumu padevīgums (*the loss compliance*)

$$J_2 = \frac{\varepsilon_0 \sin\delta}{\sigma_0}$$



Zīmējums 6.10. Sprieguma un deformācijas grafiskais attēlojums pie materiāla noslogojuma ar sinusveida slodzi.

Iepriekš vispārinātais viskozi elastīgās izturēšanās apraksts ir iegūts pie sprieguma izteikšanas kompleksā formā kā:

$$\sigma^* = \sigma_0 e^{i\omega t} \tag{6.41}$$

un arī rezultāts, t.i. deformācija, arī kompleksā formā kā:

$$\varepsilon^* = \varepsilon_0 e^{i(\omega t - \delta)} \tag{6.42}$$

No (6.41) un (6.42) saliktais modulis (*complex modulus*) $\mathrm{E}^*(i\omega)$ ir definēts kā salikts lielums (*compex quantity*):

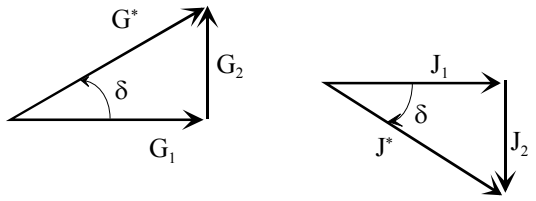
$$\sigma^* / \varepsilon^* = \mathrm{E}^*(i\omega) = \left(\sigma_0 / \varepsilon_0\right) e^{i\delta} = \mathrm{E}_1 + i\mathrm{E}_2 \tag{6.43}$$

kura reālā daļa ir uzkrāšanās modulis (*the storage modulus*) un imaginārā daļa ir zudumu modulis (*the loss modulus*).

Analoģiski, saliktais padevīgums (*the complex compliance*) tiek definēts:

$$\varepsilon^* / \sigma^* = J^*(i\omega) = \left(\varepsilon_0 / \sigma_0\right) e^{-i\delta} = J_1 - iJ_2 \tag{6.44}$$

Šeit reālā daļa ir uzkrāšanās padevīgums (*the storage compliance*) un imaginārā daļa–zudumu padevīgums (*the negative of the loss compliance*). Zīm.6.11 attēlotas E^* un J^* vektoru diagrammas, atzīmējot, ka $E^* = 1/J^*$



Zīmējums 6.11. Saliktā moduļa un saliktā padevīguma vektoru diagrammas.

6.7. Trīs dimensiju teorija.

(*Three dimensional theory*)

Apskatot lineāro viskozo elastību trīsdimensiju gadījumā parasti ņem vērā atsevišķas viskozi elastīgās īpašības pie tā sauktiem tīras cirpes (*pure shear*) un tīras paplašināšanās (*pure dilatation*) nosacījumiem. Tāda neatbilstība reāliem apstākļiem un arī tilpuma efekts tiek apskatīti kā neatkarīgi un pēc tam tiek apvienoti (kombinēti) ar paredzēto vispārīgo teoriju. Matemātiski tas ir rīkošanās ar deformāciju un spriegumu tenzoru risinājumu to deviatora un sfēriskā daļās (*spherical or hydrostatic stress tensor*), priekš katra rakstot sastādītās viskozi elastīgās attiecības. Sprieguma tenzora sairšana (*dekomposition*) tiek dota kā izteiksme:

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + \delta_{ij}\sigma_{kk}/3 \qquad (6.45)$$

un maza (niecīga) deformācijas tenzora sairšana:

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij} + \delta_{ij}\varepsilon_{kk}/3 \qquad (6.46)$$

Paskaidrojums. Spriegumu tenzors ir otrā ranga tenzors un to var sadalīt sfēriskā tenzorā un deviatorā:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_M & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_M & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_M \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_{11}-\sigma_M & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}-\sigma_M & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}-\sigma_M \end{pmatrix} \equiv$$

$$\equiv \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_M = \frac{1}{3}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})$$

Sadalīšana tiek izteikta ar izteiksmi $\sigma_{ij} = \delta_{ij}\sigma_{kk}/3 + s_{ij}$

Pamatā sprieguma tenzora deviators s_{ij} ir tas pats, kas sprieguma tenzors σ_{ij}. Sprieguma deviatora (*principal deviator stress*) vērtība ir:

$$s_{(k)} = \sigma_{(k)} - \sigma_M$$

paskaidrojuma beigas.

Šo vienādojumu apzīmēšana trīs dimensiju viskozās elastības gadījumā, līdzīgi kā (6.13), diferenciāloperatoru formā ir:

$$\{P\}s_{ij} = 2\{Q\}e_{ij} \qquad (6.47a)$$

un $\{M\}\sigma_{ii} = 3\{N\}\varepsilon_{ii}$ (6.47b)

šeit $\{P\}, \{Q\}, \{M\}, \{N\}$ ir operatori izteiksmes (6.14) veidā.

Tā kā praktiski visi materiāli elastīgi reaģē uz vidēju hidrostatisku slogojumu, tad paplašināšanās operatori $\{M\}$ un $\{N\}$ parasti tiek pieņemti kā konstantes un (6.47) pārveidotā veidā ir:

$$\{P\}s_{ij} = 2\{Q\}e_{ij} \qquad (6.48a)$$

$$\sigma_{ii} = 3K\varepsilon_{ii} \tag{6.48b}$$

šeit K ir elastīgais tilpuma modulis (*elastic bulk modulus*).

Nākošais tāds pats vispārināts noteikums ir par sagrozījumu (*distortional*) un tilpumu (*volumetric*) izteiksmju atšķiršanu jeb atdalīšanu. Trīsdimensiju viskozās elastības pamatattiecības (*constitutive relations*) šļūdes integrālam (*creep integral*) tiek rakstītas sekojošā veidā:

$$e_{ij} = \int_0^t \phi_s(t-t')\frac{\partial s_{ij}}{\partial t'}dt' \tag{6.49a}$$

$$\varepsilon_{ij} = \int_0^t \phi_v(t-t')\frac{\partial \sigma_{ii}}{\partial t'}dt' \tag{6.49b}$$

un relaksācijas integrāls sekojoši:

$$s_{ij} = \int_0^t \Phi_s(t-t')\frac{\partial e_{ij}}{\partial t'}dt' \tag{6.50a}$$

$$\sigma_{ii} = \int_0^t \Phi_v(t-t')\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t'}dt' \tag{6.50b}$$

Ja elastīgais tilpuma modulis ir dots kompleksā formā kā K^*, tad izteiksmes raksta sekojošā formā:

$$s_{ij}^* = 2\mathrm{E}^*(i\omega)e_{ij}^* = 2(\mathrm{E}_1 + i\mathrm{E}_2)e_{ij}^* \tag{6.51a}$$

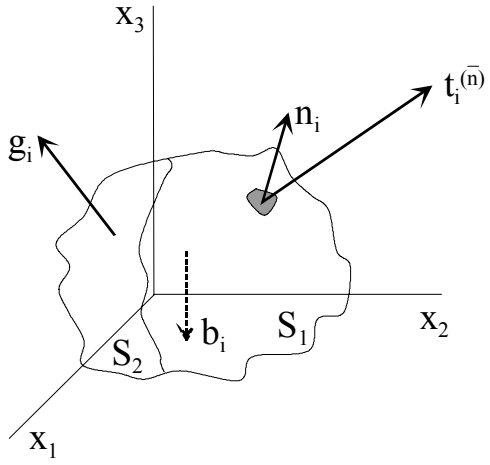
$$\sigma_{ii}^* = 3K^*(i\omega)\varepsilon_{ij}^* = 3(K_1 + iK_2)\varepsilon_{ii}^* \tag{6.51b}$$

6.8. Viskozās elastības sprieguma analīze. Atbilstības princips.

(*Viscoelastic stress analysis. Correspondence principle*)

Izotropa viskozi elastīga cieta ķermeņa sprieguma analīzes problēma, kura tilpums ir V un virsmas laukums S (zīm.6.12), tiek formulēta sekojoši:

smagumspēks b_i darbojas pa visu V , virsmai pielikts spēks $t_i^{(\bar{n})}(x_k,t)$ uz virsmas daļas S_1 , virsmas pārvietojums $g_i(x_k,t)$ dots virsmas daļai S_2 .



Zīmējums 6.12. Cieta ķermeņa ģeometrija un slogojums pie viskozās elastības analīzes.

Šeit: virsmas punktā sprieguma vektora $t_i^{(\bar{n})}$ normālās komponentes $\sigma_N n_i$ lielums ir $\sigma_N = t_i^{(\bar{n})} n_i = t^{(\bar{n})} n = \sigma_{ij} n_i n_j$.

Noteicošie vienādojumi:

1. Kustības (vai līdzsvara) vienādojums (*Equations of motion (or of equilibrium*))

$$\sigma_{ij,j} + b_i = \rho \ddot{u}_i \qquad (6.52)$$

2. Deformāciju – pārvietojumu vienādojums (*strain – displacement equations*)

$$2\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i}) \qquad (6.53)$$

vai deformāciju – ātruma – paātrinājuma vienādojums (*or strain – rate – velocity equations*)

$$2\dot{\varepsilon}_{ij} = (v_{i,j} + v_{j,i}) \qquad (6.54)$$

3. Saišu nosacījums (*boundaru conditions*)

$$\sigma_{ij}(x_k,t)n_i(x_k) = t_i^{(\bar{n})}(x_k,t) \quad \text{priekš} \quad S_1 \tag{6.55}$$

$$u_i(x_k,t) = g_i(x_k,t) \quad \text{priekš} \quad S_2 \tag{6.56}$$

4. Sākuma (ierosmes) nosacījumi (*initial conditions*)

$$u_i(x_k,0) = u_0 \tag{6.57}$$

$$v_i(x_k,0) = v_0 \tag{6.58}$$

5. Sastādāmie vienādojumi (*constitutive equations*):

a) lineāri diferenciāls operators (*linear differential operator*) (6.48) veidā vai

b) pārmantošanas integrāls (*hereditary integral*) (6.49) vai (6.50) veidā vai

c) kompleksais modulis (*complex modulus*) (6.51) veidā.

Ja cieta ķermeņa ģeometrija un slogojuma nosacījumi ir pietiekoši vienkārši un ja materiāla īpašības var attēlot ar vienkāršu modeli, tad iepriekš minētos vienādojumus var risināt ar tiešo integrēšanu. Pie daudziem vispārinātiem nosacījumiem risinājumu var meklēt pēc tā saucamā atbilstības principa (*correspondence principle*). Šis princips parādās analoģiski kā starpposms starp elastības pamatvienādojumiem(*governing field equations of elasticity*) un Laplasa pārveidojumiem saistībā ar laiku, pamatojoties uz viskozās elastības pamatvienādojumiem.

Izmantotā literatūra.

1. Mase,G.: Continuum Mechanics. New York: McGraw-Hill, 1970.

2. Eschenauer,H.; Schnell,W.: Elastizitaetstheorie. Manheim:BI-Wiss.-Verlag, 1993.